

H. C. JOKSCH

**Lineare Programme
mit zeitlichen Bedingungen**

1962

**Lineare Programme
mit zeitlichen Bedingungen**

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
H. C. JOKSCH
aus Königsberg (Pr.)

1962



1.Berichterstatter: Dozent Dr.König

2.Berichterstatter: Prof.Dr.Koch

Dekan: Prof.Dr.Deutsch

Tag der mündlichen Prüfung: 18.1.1961

Fotodruck: Max Kramer, Münster (Westf.), Aegidiistraße 23

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Fragestellung	6
1.1 Die Produktionsplanung	6
1.2 Das zeitliche Zusammenspiel von Produktionsprozessen	9
1.3 Zeitliche Teilbarkeit der Prozesse	11
1.4 Berücksichtigung des festen Aufwandes	13
2 Lineare Programme	15
2.1 Allgemeines über lineare Programme	15
2.2 Probleme mit ganzzahligen Bedingungen	18
2.3 Die Bedeutung ganzzahliger Bedingungen	21
3 Beispiele von linearen Programmen mit einfachen zeitlichen Bedingungen	23
3.1 Aufstellung eines Dienstplans bei wechselndem Arbeitsanfall	23
3.2 Gestaffelte Bedingungen	24
3.3 Optimale Erfüllung eines Fahrplans	25
3.4 Ein Maschinen-Belastungs-Problem	26
4 Ein allgemeines Linear-Programming-Modell mit zeitlichen Bedingungen	27
4.1 Formulierung des Problems	28
4.2 Probleme mit ganzen Produktmengen	29
4.3 Beschränkt teilbare Produktmengen	42
4.4 Berücksichtigung des festen Aufwandes	42
4.5 Anwendung auf ein fiktives Beispiel	47
5 Schlussbemerkungen	51
5.1 Ueber Anwendungen des untersuchten Modells	51
5.2 Ueber weitergehende Fragestellungen	53
Zusammenfassung	54
Literatur	55



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555417_0013

Einleitung

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit linearen Programmen unter zeitlichen Bedingungen. Zahlreiche Probleme der makro- und mikroökonomischen Theorie und Praxis sind mit Hilfe des linearen Programmierens bearbeitet worden. Dabei handelte es sich meistens um die günstigste Ausnutzung verfügbarer Faktormengen. In vielen Fällen reichen die einfachen Modelle aber nicht aus, da das zeitliche Zusammenspiel der einzelnen Prozesse beachtet werden muss. Dass dabei Schwierigkeiten auftreten können, liegt wesentlich daran, dass Produktionsprozesse in praxi nicht beliebig teilbar sind, und dass Produktionsprogramme nur für endliche Zeiträume aufgestellt werden. Für viele Spezialfälle sind lineare Programme entwickelt worden, die zeitliche Bedingungen enthalten. Bei der Planung allgemeiner Probleme für endliche Perioden mit nicht beliebig teilbaren Prozessen sind aber Bedingungen zu beachten, die zunächst nicht quantitativ gegeben sind, z.B. über die Reihenfolge, in der die Prozesse die Faktoren in Anspruch nehmen, und die, in der ein Faktor von verschiedenen Prozessen benutzt wird, oder bedingte Alternativen bei den Prozessen. Diese Bedingungen lassen sich als logische Verknüpfungen zwischen Gleichungen oder Ungleichungen, die die Faktor- und Prozesskombinationen mengenmäßig bestimmen, darstellen. Bei der Bestimmung der günstigsten Faktor- und Prozesskombinationen nach den üblichen Rechenverfahren können sie aber nicht berücksichtigt werden. Kann man aber Variable, die nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen, einführen, dann lassen sich alle Bedingungen in einem einheitlichen quantitativen System zusammenfassen. Probleme mit ganzzahligen Variablen weichen ihrer Struktur nach erheblich von solchen ohne diese Bedingung ab. Ihre Behandlung ist erst seit kurzem möglich. Hier soll versucht werden, unter Benutzung dieser neuesten Techniken und weit über die vorliegenden Ansätze hinausgehend, ein möglichst allgemeines lineares Modell zur Berücksichtigung zeitlicher Bedingungen aufzustellen. Zur Veranschaulichung formulieren wir es als Produktionsplanung für einen Betrieb. In vielen Fällen lässt es sich unmittelbar praktisch anwenden und ist dann dank der heute vorliegenden Rechentechniken zur effektiven Errechnung von Produktionsprogrammen brauchbar. Dies Beispiel wurde gewählt, weil es leicht übersehbar ist und weil in praktischen Fällen meistens die nötigen Daten zur Durchrechnung bekannt sind. Es ist aber auch auf andere Probleme, natürlich mit anderer Interpretation der Variablen und evtl. entsprechenden Modifikationen, anwendbar, etwa zur Untersuchung

des zeitlichen Zusammenspiels gesamtwirtschaftlicher Vorgänge. Das kann z.B. wichtig sein, wenn die wirtschaftlichen Tätigkeiten der öffentlichen Hand, sei es zum Zwecke der wirtschaftlichen Entwicklung unterentwickelter Länder, zum Zwecke der Konjunkturpolitik oder auch zum Erreichen militärischer Ziele, koordiniert werden sollen. Solche Modelle werden natürlich sehr umfangreich und kompliziert; auch die nötigen Zahlenangaben dürften nur in wenigen Fällen bekannt sein, so dass von der theoretischen Möglichkeit ihrer Untersuchung bis zur praktischen Anwendung noch ein weiter Weg sein dürfte.

1 Fragestellung

1.1 Die Produktionsplanung

Die Produktionstheorie untersucht die Frage, wie ein Unternehmer seine verfügbaren Produktionsmittel am 'besten' einsetzen soll, und in welchen Mengen die Produkte, die er herstellen kann, hergestellt werden sollen. Im Allgemeinen wird jedes Produktionsmittel bei der Herstellung mehrerer Produkte verwendet und jedes Produkt erfordert i.A. mehrere Produktionsmittel. Oft gibt es mehrere Prozesse zur Herstellung eines Produktes, die sich durch die Faktorkombinationen unterscheiden. Die Gesamtheit aller Daten, die die herzustellenden Produktmengen, den Faktoreinsatz und den Ablauf der Produktionsprozesse vollständig beschreiben, heisst 'Produktionsprogramm'. Als Kriterium für die Auswahl des 'besten' unter den verschiedenen möglichen Produktionsprogrammen nimmt man den Gewinn, die Differenz zwischen dem Erlös für die Produkte und den Kosten der Produktionsmittel

Zur anschaulichen Behandlung wird dieses Problem der Bestimmung des besten Produktionsprogramms von der traditionellen Produktionstheorie auf zwei Spezialfälle zurückgeführt. Der erste ist der einer Einproduktunternehmung, die ihre Produktionsfaktoren stetig gegeneinander substituieren kann¹⁾. Den einfachsten Fall zweier Produktionsfaktoren kann man in einer Ebene graphisch darstellen, in der die Mengen beider Faktoren als kartesische Koordinaten genommen werden. Jedem Punkt ordnet man die grösste aus den durch seine Koordinaten gegebenen Faktormengen herstellbare Produktmenge zu. Punkte gleicher Produktmenge verbindet man durch eine Kurve: die entsprechende Isoquante. Die

1) J.M.Henderson, R.E.Quandt, Microeconomic Theory. New York, Toronto, London 1958. S.47-51.

E.Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie. II.Teil, 3.Aufl. Tübingen 1955. S. 175 ff.

optimale Faktorkombination, d.h. die mit geringsten Kosten für die Faktoren, ist in dem Punkt gegeben, in dem eine der Bilanzgeraden die gegebene Isoquante tangiert. Dort ist das bekannte Kriterium erfüllt, dass die Grenzrate der Substitution der Faktoren gleich dem Verhältnis ihrer Preise ist.

Der andere Spezialfall ist die verbundene Herstellung mehrerer Produkte aus einer gegebenen Faktorkombination¹⁾. Den Fall zweier Produkte stellt man ebenfalls in einer Ebene dar, in der jetzt die Mengen der Produkte kartesische Koordinaten sind. Die Transformationskurve ist dadurch gegeben, dass sie alle die Punkte verbindet, deren Koordinaten die Produktmengen bestimmen, die bei günstigster Ausnutzung der gegebenen Faktorkombination hergestellt werden können; sie ist eine konkave Kurve. Das günstigste, d.h. den höchsten Gewinn liefernde, Produktionsprogramm ist durch den Punkt gegeben, in dem eine Bilanzgerade die Transformationskurve berührt. In ihm ist die Grenzrate der Transformation gleich dem Verhältnis der Preise der Produkte.

Diese Ueberlegungen kann man auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, in dem man die herzustellenden Mengen der einzelnen Produkte und die einzusetzenden Faktormengen wählen kann, um den maximalen Ertrag zu finden, der die Differenz aus Verkaufserlös für die Produkte und Kosten der Produktionsmittel ist²⁾. Man erhält als Bedingung für ein optimales Programm, dass die Grenzerträge eines Produktionsfaktors für alle Produkte gleich seinem Preis sein müssen und dass die Grenzrate der Substitution zweier Faktoren gleich dem Verhältnis ihrer Preise sein muss.

Bei diesen Ueberlegungen war die Produktionsfunktion in Form der Isoquanten oder Transformationskurven als bekannt vorausgesetzt. Entweder muss man sie aus den technischen Daten, die den Ablauf der Produktionsprozesse bestimmen, theoretisch ableiten, oder sie empirisch zu bestimmen suchen. Letzteres bedingt einen erheblichen Aufwand und dürfte praktisch nur von geringem Nutzen sein, da die empirischen Werte mit zufälligen Fehlern behaftet sind, die sich in den Ableitungen der Funktion, die ja bei Grenzbetrachtungen auftreten, erheblich stärker

1) Henderson & Quandt, l.c. S. 67-71.

Schneider, l.c. S. 161 ff.

2) Henderson & Quandt, l.c. S. 72-75.

auswirken. Dagegen dürften die technischen Daten zuverlässiger bekannt sein¹⁾.

Die für diese Produktionsfunktion gemachte Annahme der stetigen Substituierbarkeit der Faktoren ist bei den meisten technischen Prozessen nicht gerechtfertigt. Vielmehr erfordern fast alle Prozesse, die auf Maschinen ablaufen, Einsatz der Produktionsmittel in festem Verhältnis; evtl. sind mehrere diskrete Kombinationen möglich. Daher ist es zweckmässig, ein Modell zu benutzen, das von besonders einfachen, nämlich limitationalen, Produktionsprozessen ausgehend, eine Produktionsfunktion entwickelt: das Linear-Programming-Modell²⁾. Seine Anwendung ist aber nicht auf limitationale Prozesse beschränkt. Man kann auch Produktionsvorgänge, bei denen die Produktionsfaktoren gegeneinander substituierbar sind, durch lineare Programme hinreichend genau angenähert beschreiben, vorausgesetzt, dass die Produktionsfunktion homogen ist.

In den Fällen, in denen ein lineares Modell nicht ausreicht, kann man den durch Verallgemeinerung des linearen Programmierens entstandenen nichtlinearen Ansatz benutzen³⁾. Allerdings gibt es dann nur noch in Spezialfällen Verfahren zur effektiven Berechnung der Lösungen.

Das lineare und nichtlineare Produktionsmodell stehen nicht in irgendeinem Gegensatz zu dem Modell der traditionellen Produktionstheorie. Die Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms beruht bei beiden Modellen auf sehr ähnlichen Ueberlegungen. Dagegen wird von der traditionellen Theorie die Kenntnis der Produktionsfunktion vorausgesetzt und ihre nicht leichte Ermittlung aus den Ueberlegungen ausgeklammert, während das Programmierungsmodell weiter in die Einzelheiten des Produktionsvorgangs eindringt und nur die Kenntnis der einzelnen Produktionsprozesse fordert. Eine Produktionsfunktion tritt dabei gar nicht explizit auf. Vielmehr wird eine optimale Lösung unmittelbar aus den Daten der einzelnen Prozesse und den Preisen errechnet. Darin, und besonders in dem im linearen Fall sehr einfachen Rechenverfahren, liegt die Stärke des Programmierungsmodells.

-
- 1) Vgl. H.B.Chenery, Process and Production Function from Engineering Data. In: Leontief, Studies in the Structure of the American Economy. New York 1953
 - 2) Henderson & Quandt, l.c. S. 75-82.
R.Dorfman, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Berkeley 1951
R.Dorfman, P.A.Samuelson, R.M.Solow, Linear Programming and Economic Analysis. New York, Toronto, London 1958. Abschnitte 6 und 7.
 - 3) Dorfman, Samuelson, Solow, l.c. Abschnitt 8.

1.2 Das zeitliche Zusammenspiel von Produktionsprozessen.

Bisher haben wir von 'Produktionsmittelmengen' gesprochen, ohne Produktionsmittel definiert zu haben. Dies geschah deshalb, weil es von den speziellen Eigenschaften des zu untersuchenden Produktionsprozesses abhängt, was man als Produktionsmittel definiert, d.h., wie man es von anderen, insbesondere ähnlichen, Produktionsmitteln abgrenzt. Z.B. ist für den Produktionsprozess des Giessens das einzusetzende Metall durch seine Masse, unabhängig von seiner Form, als Produktionsmittel hinreichend genau bestimmt. Dagegen ist für die Bearbeitung auf der Drehbank seine Form (Profil) wichtig, und die Länge kann ein geeigneteres Mass sein als die Masse, die man erst umrechnen muss.

Manche Produktionsmittel, wie Roh- und Betriebsstoffe, können gelagert werden (Stockgrössen), und sind daher -von etwaigen, leicht zu berücksichtigenden, Lagerverlusten abgesehen - zeitunabhängig. Andere Produktionsmittel, z.B. eine Maschine oder ein Arbeiter, haben eine Produktionskapazität, die durch Ausstoss/Zeiteinheit gemessen wird (Flow-Grösse) und die zeitgebunden ist. So sind z.B. Arbeitsstunden an den Zeitabschnitt gebunden, in dem die Arbeit geleistet werden kann; sie können nicht gelagert und später genutzt werden. (Dem widerspricht das 'Nacharbeiten' einer versäumten Arbeit nicht: dabei wird zu einem späteren Zeitpunkt eine zusätzliche Arbeitskapazität ausgenutzt.) Ebenso ist es mit Maschinenkapazitäten, deren Einsatz im Zeitablauf erfolgt. Hier entsteht leicht eine kompliziertere Situation dadurch, dass manche Maschinen insgesamt nur eine bestimmte Zahl von Betriebsstunden arbeiten können und dann ersetzt werden müssen. In diesem Falle muss man zwischen der Kapazität, die als Ausstoss/Zeiteinheit gemessen wird, und dem Gesamtausstoss während der Lebensdauer unterscheiden. Die erstere liefert eine Beschränkung, die an den jeweiligen Zeitpunkt geknüpft ist, die letztere eine rein mengenmässige, zeitunabhängige.

Je nach dem zu untersuchenden Prozess kann dasselbe physische Gut zeitabhängige oder zeitunabhängige Beschränkungen liefern. Z.B. ist der Boden, wenn man auf ihm ein Gebäude errichten will, wenigstens bei langer Lebensdauer des Gebäudes, 'lagerbar' und wird bei Errichtung des Gebäudes 'verbraucht'. Für die Landwirtschaft hat er dagegen eine zeitgebundene Kapazität wie eine Maschine. Dies wird besonders deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass bei bestimmten Bedingungen zwei oder gar drei verschiedene Produkte in einem Jahr angebaut werden können, dass dieser Anbau aber streng zeitgebunden

ist.

Daher muss man Produktionsmittel auch nach ihrer zeitlichen Verfügbarkeit differenzieren. Ein einfacher Weg ist die Aufgliederung der Zeit in 'Produktionsperioden'. Dies ist aber oft unzureichend oder wenigstens zu kompliziert, da auch innerhalb einer Produktionsperiode zeitliche Bedingungen zu berücksichtigen sein können, und da verschiedene Prozesse verschiedene Zeiten benötigen können, so dass sie in verschiedene Produktionsperioden übergreifen. Im Allgemeinen muss man daher kompliziertere Bedingungen aufstellen, die genauer berücksichtigen, wie die Produktionsfaktoren an Zeiträume gebunden sind und wie die Produktionsprozesse aufeinander folgen müssen. Dann erhält man bei der Lösung eines Problems nicht nur die herzustellen Produkt- und einzusetzenden Faktormengen, sondern auch die Zeiten, zu denen die einzelnen Prozesse ablaufen sollen. Damit erst hat man die Angaben, die man für eine praktisch brauchbare Planung des betrieblichen Arbeitsablaufs braucht.

Die Bedeutung der zeitlichen Bindung der Kapazitäten sei an einem einfachen, fast trivialen, Beispiel erläutert. In einem Betrieb stehen zwei Maschinen für einen Zeitraum von 100 Stunden zur Verfügung; man hat also je 100 Maschinenstunden. Ein Auftrag A erfordert eine Zeit von 30 Stunden auf der Maschine 1 und danach 20 auf Maschine 2. Ein anderer Auftrag B erfordert 30 Stunden auf Maschine 1 und danach 50 auf Maschine 2. Dabei ist die Reihenfolge 1-2 der Bearbeitung auf beiden Maschinen vorgeschrieben. Insgesamt werden also 60 Stunden auf Maschine 1 und 70 Stunden auf Maschine 2 benötigt. Beachtet man nur die Maschinenstunden, dann ist die Kapazität zur Erledigung beider Aufträge ausreichend. Berücksichtigt man aber auch die vorgeschriebene zeitliche Reihenfolge der Bearbeitung, dann hat man die beiden in Abb. 1 in Form einer Gantt-Karte¹⁾ dargestellten Möglichkeiten.

Abb. 1a zeigt den Zeitplan, wenn zuerst Auftrag A und dann Auftrag B ausgeführt wird. Die ersten 30 Stunden auf Maschine 2 müssen offensichtlich ungenutzt bleiben. Die Stunden 40...50 gehen offenbar ebenfalls durch Warten auf den Auftrag B verloren. B kann dann inn-

1) F.G.Moore, Production Control, New York, Toronto, London 1951, S.229 ff. C.W.Churchman, R.L.Ackoff, E.L.Arnoff, Introduction to Operations Research. New York, London 1957, S.452 ff. A.Vazsony, Scientific Programming in Business and Industry. New York, London 1958, S.410 ff.

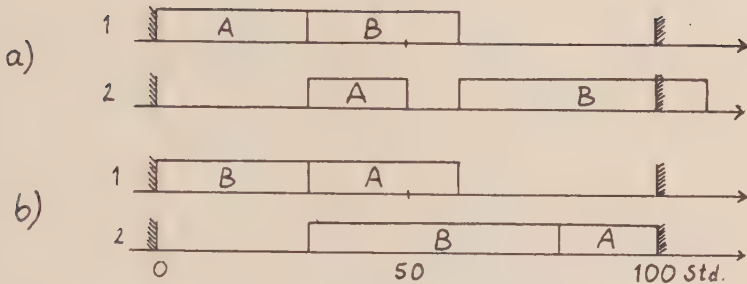


Abbildung 1

erhalb der verfügbaren Zeit nicht mehr fertiggestellt werden. Günstiger ist - und da es in diesem Fall nur zwei Anordnungen gibt, die günstigste - die Anordnung der Abb.1b. Nach den unvermeidlichen ersten dreissig Stunden Wartezeit ist Maschine 2 die übrige Zeit pausenlos beschäftigt. Die beiden Aufträge können genau in der verfügbaren Zeit abgewickelt werden. Würde ein Auftrag nur etwas mehr Arbeitszeit auf Maschine 2 erfordern, dann wäre es unmöglich, trotz der scheinbar reichlich vorhandenen Maschinenkapazität, beide Aufträge in der verfügbaren Zeit zu erledigen.

Als ganz krasses Beispiel sei nur erwähnt, dass überhaupt kein Auftrag durchgeführt werden kann, wenn bei sonst reichlich vorhandener Maschinenzeit diese für Maschine 2 vor der für Maschine 1 liegt.

1.3 Zeitliche Teilbarkeit der Prozesse.

Um einen genaueren Einblick in die Wirksamkeit zeitlicher Bedingungen zu bekommen, wollen wir einige Varianten des im vorigen Abschnitts behandelten Beispiels betrachten. Nehmen wir an, dass von dem Maschinentyp 1 zwei gleiche Maschinen 1 und 1' zur Verfügung stehen, ebenso vom Maschinentyp 2 zwei Exemplare 2 und 2'. Sie seien für einen Zeitraum von 50 Stunden verfügbar, also insgesamt 100 Maschinenstunden jedes Typs, wie im vorigen Beispiel. Abb. 2 veranschaulicht die Verhältnisse und zeigt, dass das Programm nicht durchgeführt werden kann, da jetzt auf beiden Maschinen 2 und 2' die ersten 30 Stunden verlorengehen. Dies tritt immer dann auf, wenn der Auftrag z.B. in der Bearbeitung eines grossen Werkstücks besteht,

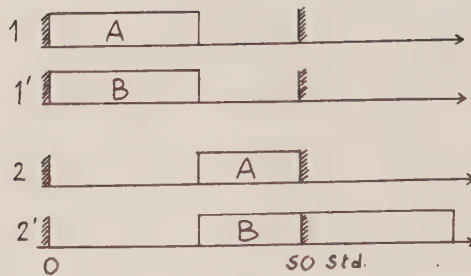


Abbildung 2

bei der jeder Arbeitsgang auf einer Maschine zuende geführt werden muss, bevor der nächste beginnen kann. Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Aufträge in der Herstellung oder Bearbeitung einer grösseren Anzahl gleicher Werkstücke bestehen oder, wie beimischen Prozessen, in der Herstellung eines homogenen, praktisch beliebig teilbaren Gutes. Vorerst wollen wir annehmen, dass bei einer Teilung der Auftragsmenge die Bearbeitungszeiten in demselben Verhältnis geteilt werden.

In dem eben behandelten Fall kann man dann die Aufträge in zwei gleiche Teilaufträge, die also jeweils die halbe ursprüngliche Maschinenzeit brauchen, zerlegen, von denen dann jeder in der verfügbaren Zeit auf den vorhandenen Maschinen erledigt werden kann, da man jetzt genau zwei Probleme derselben Struktur wie im vorigen Abschnitt hat; der Unterschied liegt nur darin, dass alle Zeiten halbiert sind.

Gehen wir nun auf das ursprüngliche Problem zurück, nehmen dabei aber Teilbarkeit der Aufträge an! Kann man die Aufträge halbieren, dann zeigen Abb. 3a und 3b zwei der möglichen besten Produktionspro-

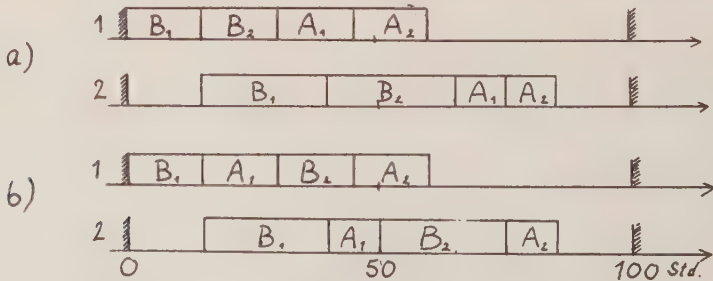


Abbildung 3

gramme. Die unvermeidliche Leerzeit der Maschine 2 ist auf 15 Stunden zurückgegangen, infolgedessen können die Aufträge schon nach 85 Stunden abgewickelt sein und die Kapazität der Maschine ist noch nicht voll ausgenutzt.

Man erkennt, dass man mit zunehmender Teilung der Aufträge immer näher an die volle Auslastung der vorhandenen Kapazitäten herankommt. Tatsächlich kann man durch hinreichend feine Teilung der Fertigungsaufträge die Kapazität beliebig gut ausnutzen, soweit die Reihenfolge der einzelnen Arbeitsgänge eine Rolle spielt. Natürlich kann man so keine Leerzeiten, die durch ungünstige zeitliche Anordnung der Produktionskapazitäten entstehen, vermeiden, z.B. wenn, wie oben erwähnt, die Kapazität der zweiten Maschine früher als die der ersten verfügbar ist, oder, wie in Abb.4 gezeigt, wenn auch nur ein Teil der Kapazität der ersten Maschine erst später als die Kapazität der zweiten verfügbar ist.

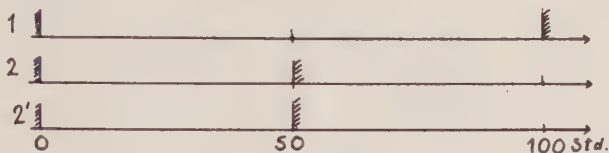


Abbildung 4

1.4 Berücksichtigung des festen Aufwandes.

Im Gegensatz zu den Ueberlegungen des vorigen Abschnittes sind nicht nur aus technischen Gründen in den meisten Fällen die Aufträge und Produktionsprozesse nicht beliebig teilbar, sondern auch dort, wo dies – wenigstens weitgehend – der Fall ist, kann es aus ökonomischen Gründen unerwünscht sein, die Aufträge zu weit zu unterteilen. Falls es sich bei den Maschinen nicht um Spezialmaschinen handelt, die nur ein festgelegtes Produkt herstellen oder nur einen festgelegten Arbeitsgang leisten können, ist beim Beginn eines neuen Arbeitsganges eine gewisse Rüstzeit notwendig (zum Einsetzen von Werkzeugen oder Formen, zum Einstellen der Masse usw.), die unabhängig von der Höhe der später herzustellenden Auflage des Werkstückes ist.

Während man nun durch eine Unterteilung der Aufträge einerseits ein immer besseres Ineinandergreifen der Produktionsvorgänge erreichen kann, treten durch die notwendigen Umstellungen der Maschinen immer grössere Verluste durch zusätzliche Rüstzeiten ein. Das Problem ist, einen Produktionsplan aufzustellen, bei dem der eine Gewinn noch

nicht durch den anderen Verlust aufgezehrt wird. Ein ähnliches Problem liegt bei der Frage nach der optimalen Seriengrösse vor¹⁾, wo zwischen der durch grössere Serien verursachten Ermässigung der Stückkosten - wegen der Verteilung der Auflegekosten auf eine grössere Anzahl von Stücken - und der Steigerung der Lagerkosten abzuwägen ist. In unserem Falle sind die Verhältnisse aber wesentlich komplizierter, da eine Veränderung des Arbeitsablaufs auf einer Maschine fast immer auch eine Änderung für alle anderen bedingt, so dass erheblich mehr Variable auftreten. Für den einfachsten Fall, dass zwei Produkte auf einer Maschine hergestellt werden, ist die Frage der optimalen Seriengrösse von Salvesson untersucht worden²⁾.

Zur Veranschaulichung machen wir über das Beispiel aus 1.2 weitergehende Annahmen, nämlich dass der Auftrag A in der Herstellung von fünf Stücken eines Produktes besteht, dass die Gesamtzeit von 30 Stunden auf Maschine 1 sich aus 5 Stunden Rüstzeit und 5 Stunden für die Bearbeitung jedes Stücks zusammensetzt. Die 20 Stunden Arbeitszeit auf Maschine 2 sollen sich aus 10 Stunden Rüstzeit und 5 mal 2 Stunden Stückzeit zusammensetzen. Der Auftrag B bestehe in der Herstellung von zwei Stücken des anderen Produktes. Die Rüstzeit auf Maschine 1 betrage 5 Stunden, die Stückzeit 12,5 Stunden; auf Maschine 2 sei die Rüstzeit 40 Stunden, die Stückzeit 5 Stunden. Abb. 5 zeigt einen optimalen Produktionsplan für dieses Problem. Die Produkte A und B sind durch verschiedene Schraffur der die Zeiten andeutenden Flächen unterschieden, die Zahl 0 bedeutet Rüstzeit, eine Zahl i die Bearbeitung des i-ten Stückes. Man sieht, dass eine lük-

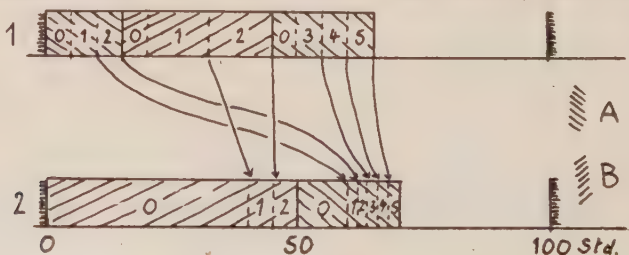


Abbildung 5

- 1) E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. 1. Band. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951. S. 296 ff.
- 2) M. E. Salvesson, A Problem in Optimal Machine Loading. Management Science 2 (1956), 232-260.

kenlose Auslastung der Maschine 2 und damit schnellst Durchführung der gesamten Arbeit nur durch Aufteilung des Auftrags A auf der ersten Maschine möglich ist.

Schon in diesem ganz einfachen Fall ist ein optimales Programm nur mit einiger Ueberlegung zu finden. In auch nur etwas komplizierteren Fällen ist es schon sehr mühsam und bei grösseren Problemen praktisch unmöglich. Man muss daher systematische Lösungsverfahren suchen.

2 Lineare Programme

Bevor wir kompliziertere Modelle mit zeitlichen Bedingungen behandeln, wollen wir das Wichtigste über lineare Programme in elementarer Form referieren und dabei besonders auf die weniger bekannten neueren Entwicklungen eingehen, ohne die eine allgemeine Behandlung der komplizierten zeitlichen Bedingungen nicht möglich wäre.

2.1 Allgemeines über lineare Programme

Die abstrakte Formulierung des linearen Programmierungsproblems ist:

n nicht-negative Variable x_j

$$(1) \quad x_j \geq 0$$

zwischen denen m Beziehungen von der Form

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

bestehen, sollen so bestimmt werden, dass eine lineare Funktion

$$(3) \quad z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

maximiert (oder bei bestimmten Fragestellungen minimiert) wird.

Eine anschauliche, aber immer noch sehr allgemeine Interpretation des Problems ist folgende: jeder der n 'Prozesse' des Modells, der durch die Koeffizienten a_{ij} vollständig beschrieben ist, braucht, wenn er mit der 'Intensität' x_i betrieben wird, die proportionalen

Mengen

$$a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \dots, a_{mj}x_j$$

der m 'Faktoren', die in den Mengen b_i vorhanden sind. Die Prozesse sind unabhängig, d.h. der Gesamtverbrauch ist die Summe der von den einzelnen Prozessen verbrauchten Mengen. Da der Gesamtverbrauch die vorhandene Menge nicht überschreiten kann, muss

$$(4) \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

sein. Auch Bedingungen mit $\geq$ oder $=$ -Zeichen lassen sich so, freilich nicht mehr ganz so anschaulich, interpretieren, da man sie durch $\leq$ Beziehungen ausdrücken kann. Jeder Prozess wirft einen Ertrag ab, der der Intensität, mit der er betrieben wird, proportional ist: c_jx_j . Der Gesamtertrag der unabhängigen Prozesse ist die Summe der Einzelerträge:

$$(5) \quad z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n.$$

Diese Interpretation erschöpft aber keineswegs den gesamten Anwendungsbereich des linearen Programmierens. Jedes Problem, in dem sich eine Struktur finden lässt, die mit hinreichender Genauigkeit durch die Beziehungen (1), (2) und (3) beschrieben wird, lässt sich als lineares Programm behandeln. Dabei können die x_j sehr verschiedene, auch kompliziertere, Bedeutungen haben und brauchen keineswegs Prozessintensitäten, Mengen oder andere einfache Begriffe zu sein. Auch die Bedingungen (2) können ganz andere Bedeutungen haben als einfache Faktormengenbeschränkungen. Wesentlich ist nur, dass die logische Struktur des Zusammenhangs der Variablen durch Beziehungen der Art (1), (2) und (3) beschrieben werden kann.

Das Herausschälen einer solchen Struktur unter Vernachlässigung unwesentlicher Umstände ist die Hauptarbeit bei der praktischen Behandlung von linearen Programmierungsmodellen. Eine gewisse Schwierigkeit liegt oft darin, dass die Zielsetzung einer Planung über den Rahmen des Modells hinausgehen kann, etwa durch Berücksichtigung langfristiger Effekte, oder bei marktbeherrschenden Unternehmen politischer Überlegungen, so dass eine einfache Gewinnmaximierung keine befriedigende Lösung bringt. Dann muss man versuchen, eine lineare Funktion in den Variablen des Modells zu finden, die auch diese Überlegungen mit genügender Annäherung in Rechnung stellt, oder, wenn das nicht gelingt, zu komplizierteren Modellen greifen. Diese liegen aber ausserhalb des Rahmens unserer Betrachtungen.

Zur numerischen Lösung von linearen Programmierungsproblemen gibt es verschiedene Verfahren. Praktisch wird fast ausschliesslich die Simplex-Methode in ihren verschiedenen Formen benutzt¹⁾. Sie ist für die meisten Elektronenrechner programmiert, so dass Probleme mit einigen hundert Variablen und Bedingungen numerisch gelöst werden können. Bei Problemen, die diesen Umfang überschreiten, muss man die spezielle Struktur ausnutzen, um das Lösungsverfahren so zu spezialisieren, dass es in vernünftiger, wirtschaftlich tragbarer, Zeit zur Lösung führt.

Alle Lösungsverfahren für lineare Programme sind Algorithmen, d.h. Rechenverfahren, die angeben, wie aus den Zahlenwerten des Problems die Zahlenwerte der Lösung errechnet werden. Der Gegensatz zu den Lösungen von Problemen mit expliziten Formeln für die Unbekannten liegt darin, dass man bei diesen den Einfluss von Datenänderungen auf die Lösungswerte direkt ermitteln kann, während man bei jenen die Rechnung mit den geänderten Werten wiederholen müsste. Dies wird einem durch die Techniken des parametrischen linearen Programmierens erspart²⁾.

Erst durch diese zusätzliche Uebersicht über das Verhalten der Lösungen gegenüber Änderungen der Daten erhält man die für die Praxis nötigen Informationen. Die Kenntnis 'der' optimalen Lösung ist meistens nicht ausreichend. Manchmal kennt man nämlich nicht alle Daten genau, manchmal kann es aus anderen, in der Rechnung nicht zu berücksichtigenden, Gründen erwünscht sein, von der optimalen Lösung abzuweichen. Wichtig ist ausserdem, dass die Technik des parametrischen linearen Programmierens gestattet, den Einfluss von Änderungen von Parametern, die langfristig beeinflussbar sind, die aber für die kurzfristige Planung als gegeben angesehen werden müssen, auf das Gesamtergebnis eines Programmes auszurechnen.

-
- 1) Eine vollständige und übersichtliche Darstellung findet man bei: A.Charnes, W.W.Cooper, A.Henderson, An Introduction to Linear Programming. New York 1953.
 - 2) T.Saaty, S.Gass, Parametric Objective Function (Part 1). J. of the Operations Res. Soc.of America. 2 (1954) 316-319
 S.I.Gass, Th.L.Saaty, Parametric Objective Function (part 2). Ebenda 3 (1955) 395-401.
 S.Gass, Linear Programming, New York, Toronto, London 1958.
 Kap.8.2 The Parametric Dual Problem. S.115-118.

2.2 Probleme mit ganzzahligen Bedingungen

Bei sehr vielen praktischen Problemen sind die auftretenden Variablen Stückzahlen; sie dürfen in einer realisierbaren Lösung nur ganzzahlige Werte haben. Eine strenge Lösung linearer Gleichungssysteme - dies steckt implizit in der Lösung eines Linear-Programming-Problems - mit ganzzahligen Variablen - diophantische Gleichungen - ist mathematisch äusserst kompliziert. Glücklicherweise ist das in sehr vielen Fällen nicht erforderlich. Man kann oft mit als stetig veränderlich angenommenen Variablen x_j rechnen, die optimale Lösung eines Problems suchen und, falls diese nicht ganzzahlig ist, die mit den nächstgelegenen ganzen Zahlenwerten nehmen. Sind die Werte der Variablen gross genug, so dass die Ganzzahligkeitsbedingung relativ kleine schrittweise Änderungen der Variablen zulässt, dann wird man im Allgemeinen so auf die optimale oder wenigstens eine sehr gute ganzzahlige Lösung kommen. Abb.6 zeigt

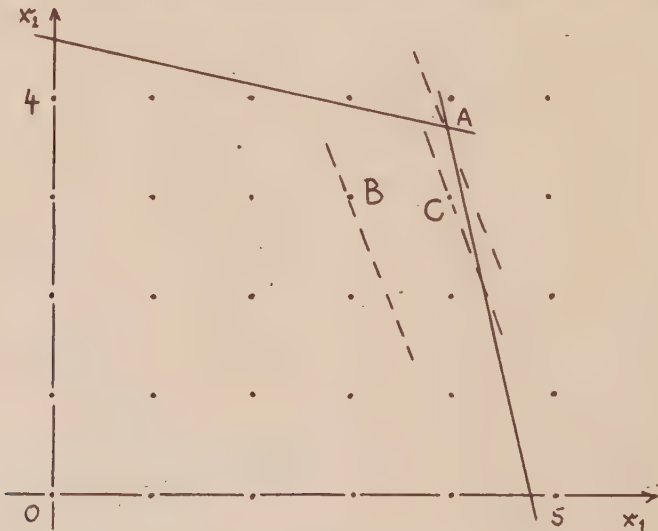


Abbildung 6

ein Beispiel. Wegen der Ganzzahligkeitsbedingung sind nur die eingezeichneten Punkte als Lösungen zulässig. Ohne Ganzzahligkeitsbedingung wäre A die optimale Lösung; rundet man seine Koordinaten auf die nächstkleineren ganzen Werte ab, dann kommt man auf den Punkt B. Er hat einen nur wenig geringeren z-Wert als der ganzzahlige Optimalpunkt C.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Variablen kleine Zahlenwerte haben. Das kann z.B. der Fall sein, wenn wenige grosse Werkstücke zu bearbeiten sind, wenn Maschinen mit Arbeitern zu besetzen sind oder bei den im nächsten Abschnitt zu behandelnden Problemen, bei denen Variable auftreten, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Abb.7 zeigt ein einfaches Beispiel. Rundet man die Koordinaten der nicht-ganzzahligen Optimallösung A ab, dann kommt man auf B. B ist eine merklich schlechtere Lösung als C, die man durch Abrunden von

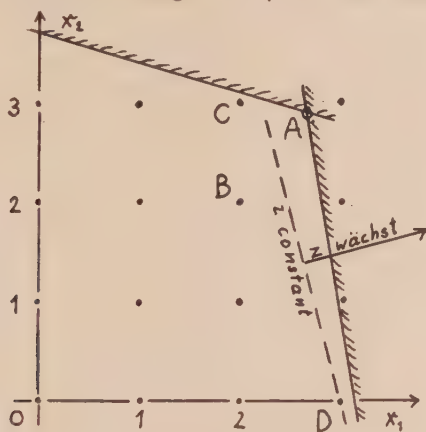


Abbildung 7

x_1 und Aufrunden von x_2 erreichen kann. Die optimale ganzzahlige Lösung ist aber der ziemlich weit entfernte Punkt D.

Hat man gar Bedingungen wie im Fall der Abb.8, dann erhält man durch Auf- oder Abrunden der nicht ganzzahligen Optimallösung überhaupt keine realisierbare Lösung. Die einzige ganzzahlige - und damit auch optimale - Lösung ist $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$.

Die Lösung linearer Programmierungsprobleme mit ganzzahligen Bedingungen hat lange Zeit erhebliche Schwierigkeiten bereitet und war nur in Spezialfällen möglich. Der Grundgedanke der Lösungsverfahren besteht darin, zusätzliche Beschränkungen einzuführen, die den Lösungsbereich so einengen, dass alle Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, die aber auch keinen zulässigen ganzzahligen Lösungspunkt abschneiden¹⁾. Abb.9 zeigt das Problem der Abb.7 mit zwei zu-

1) Siehe folgende Seite.

sätzlichen Beschränkungen, die das Gewünschte leisten. Die prak-

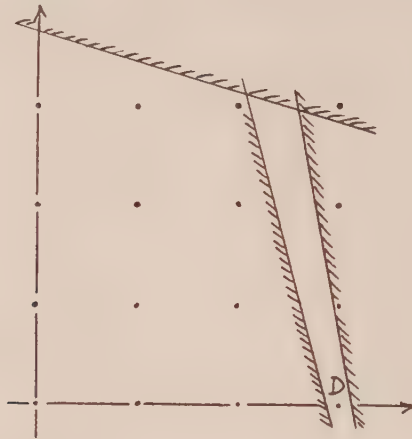


Abbildung 8

tische Schwierigkeit liegt darin, ein Verfahren zu finden, auch in

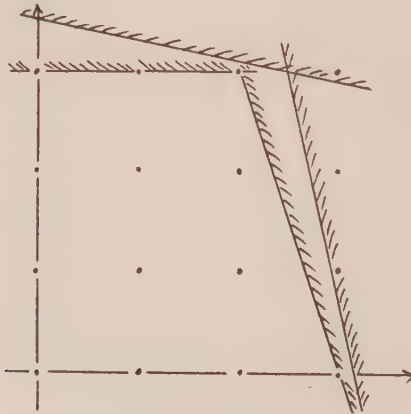


Abbildung 9

den unanschaulichen Fällen mit mehr Variablen solche Beschränkungen zu finden. Ein einfaches allgemeines Verfahren, das dies leistet, ist kürzlich entwickelt worden²⁾.

1) H.M.Markowitz, A.S.Manne, On the Solution of Discrete Programming Problems. *Econometrica* 25 (1957) 84-101.

2) R.Gomory, Outlines of an Algorithm for Integer Solution to

2.3 Die Bedeutung ganzzahliger Bedingungen

Ganzzahlige Variable treten streng genommen überall da auf, wo es sich um Stückzahlen handelt. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wann die Ganzzahligkeit wesentlichen Einfluss auf die Struktur des Problems hat und wann sie nur kleinere Änderungen der Lösung bedingt. Ausserdem spielt die Ganzzahligkeit eine entscheidende Rolle bei der Behandlung logischer Beziehungen durch Einführung von Hilfsvariablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können¹⁾.

Bei der zeitlichen Verknüpfung wirtschaftlicher Prozesse treten oft Forderungen der Art auf: wenn Bedingung A erfüllt ist, dann und nur dann muss auch B erfüllt sein, oder: entweder Bedingung C oder Bedingung D muss erfüllt sein. Solche Bedingungen sind einer rechnerischen Behandlung an sich sehr schwer zugänglich. Es lassen sich aber bekanntlich alle logischen Verknüpfungen auf ja/nein-Schemata zurückführen, die wiederum durch 1/0 Variable beschrieben werden können. Der Kernpunkt unserer Überlegungen ist die Einarbeitung dieser Variablen in die übrigen Bedingungsgleichungen des Problems.

Das Verfahren sei an einfachen Beispielen erläutert. Für eine Variable $x \geq 0$ sei gefordert:

$$(6) \quad \text{entweder } x \leq a$$

$$(7) \quad \text{oder } x \geq b.$$

Man führt dann eine Hilfsvariable $z = 0$ oder 1 und eine hinreichend grosse Zahl M ein und fordert:

$$(8) \quad x \leq a + zM$$

$$(9) \quad x \geq b - (1 - z)M.$$

Ist M grösser als jedes x , das im Programm auftreten kann, und auch grösser als b , dann leisten die Bedingungen (8) und (9) genau das Gewünschte: für $z = 1$ ist x durch (8) nicht beschränkt, (9) sichert die Erfüllung von (7). Ist $z = 0$, dann bedeutet (9) keine Beschränkung, (8) wird aber zu (6).

Eine spezielle Beschränkung dieser Art ist

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x \geq b,$$

die z.B. dann auftritt, wenn es sich nur lohnt, mehr als eine gewisse Mindestmenge eines Produktes herzustellen.

Linear Programs. Bull. of the American Math. Soc. 64 (1958) 275-278.

1) G.B. Dantzig, On the Significance of Solving Linear Programs with Some Integer Variables. Econometrica 28 (1960) 30-44.

Bedingungen der Art: wenn A, genau dann B, lassen sich leicht auf die Form 'entweder/oder' bringen, nämlich

entweder: A und B erfüllt

oder: A nicht erfüllt und B nicht erfüllt.

Ein in der Wirtschaft häufig auftretendes Problem ist das des fixen Aufwandes: wird ein Produkt in einer Menge $x > 0$ hergestellt, dann tritt ein fester Aufwand auf (Einrichtekosten, Einrichtezeit, Auflegekosten usw.), der durch eine ganzzahlige Hilfsvariable $y=1$ gekennzeichnet werden soll. Ist dagegen $x = 0$, dann ist auch $y = 0$. Seine Bearbeitung bereitet gewisse Schwierigkeiten, weil das Intervall $x > 0$ offen und nicht, wie die durch $\geq$ -Beziehungen gegebenen, abgeschlossen ist¹⁾. Sind aber die x , was sehr oft der Fall ist, ganze Zahlen, dann kann man $x > 0$ durch $x \geq 1$ ersetzen, und

$$(10) \quad y \leq x \leq yM$$

leistet offensichtlich genau das Gewünschte.

Wenn x auch gebrochene Werte annehmen kann, so gibt es wegen der beschränkten Genauigkeit praktischer Zahlenwerte immer ein kleines ϵ , so dass man $x < \epsilon$ als $x = 0$ und erst $x \geq \epsilon$ als $x > 0$ ansehen wird.

Dann ersetzt man (10) durch

$$(11) \quad x \leq yM$$

$$(12) \quad y \leq x/\epsilon,$$

die jetzt die Forderungen erfüllen.

Alle beliebig komplizierten logischen Bedingungen kann man auf diese Weise durch Einführung hinreichend vieler Hilfsvariablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen sollen, in geeigneter Verknüpfung in die Form linearer Bedingungen bringen. Wir werden in den späteren Abschnitten häufig davon Gebrauch machen.

1) Die von Dantzig, l.c. Formeln (45)-(48), angegebenen Bedingungen sind nur in dem Falle ausreichend, in dem y - bei ihm **6** - in der zu minimierenden Zielfunktion mit positivem Koeffizienten auftritt. Andernfalls folgt aus ihnen nicht: wenn $x = 0$, dann $y = 0$.

3 Beispiele von linearen Programmen mit einfachen zeitlichen Bedingungen

Bevor wir Modelle mit allgemeinen zeitlichen Bedingungen aufstellen, wollen wir an einigen einfachen Beispielen zeigen, wie spezielle Probleme als gewöhnliche lineare Programme behandelt werden können. Das letzte der behandelten Modelle berücksichtigt allerdings auch schon eine logische Bedingung durch Einführung ganzzahliger Variablen.

3.1 Aufstellung eines Dienstplans bei wechselndem Arbeitsanfall¹⁾

Schwankt der Arbeitsanfall in einem Betrieb (z.B. Verkehrsbetrieb) zeitlich stark, aber in bekannter Weise, dann kann man versuchen, durch geschickte Planung der Schichten mit möglichst wenig Arbeitskräften auszukommen. Man unterteilt die Planungsperiode in geeignete Intervalle $t = 1, 2, \dots, T$. Eine Schicht wird durch Koeffizienten a_{si} charakterisiert: $a_{si}=1$, wenn die zur Zeit s beginnenden Arbeiter im Zeitintervall i arbeiten, $a_{si}=0$, wenn nicht gearbeitet wird, also vor Beginn und nach Ende der Schicht und während der Pausen. x_s sei die Zahl der Arbeiter, die zur Zeit s beginnen, b_i die Zahl der im Zeitintervall i benötigten. Dann muss

$$(13) \quad \sum_s x_s a_{si} \geq b_i$$

sein. Die Gesamtzahl der Arbeiter, die minimiert werden soll, ist

$$(14) \quad \sum_s x_s = z.$$

Man kann das Problem noch weiter untersuchen, indem man z.B. verschiedene Anordnungen der Pausen innerhalb einer Schicht zulässt und die günstigste auswählt.

Mit diesem Ansatz kann man z.B. auch die Frage untersuchen: kontinuierlicher oder diskontinuierlicher Betrieb von Werken? Dazu muss man eine hinreichend lange Planungsperiode wählen, als Bedingungen den zeitlichen Arbeitsbedarf in beiden Fällen und die möglichen Schichtpläne. Die einzelnen Schichten kann man verschieden bewerten: Tagschichten, Nachtschichten, Sonntagsschichten, evtl. auch Gleichmässigkeit des Schichtplans. Wenn eine sinnvolle Bewertung möglich ist, kann man durch Optimierung der jeweiligen Zielfunktionen die optimalen Möglichkeiten der beiden Arbeitsweisen gegeneinander abwägen.

1) G.B.Dantzig, A Comment on Eddie's 'Traffic Delays at Toll Booth'. Journ. of the Operations Res. Soc. of America 2 (1954) 339-341.

3.2 Gestaffelte Bedingungen

Viele ökonomische Prozesse sind so, dass sie zu jeder Zeit nach dem gleichen Modell ablaufen können, dass aber der Output mancher Prozesse erst zu späterer Zeit als Input verwendet werden kann. Ist der Produktionsablauf von Natur aus klar in Produktionsperioden gegliedert, so ist eine übersichtliche Behandlung möglich. Ein Beispiel ist die Landwirtschaft, wo das Jahr als natürliche Produktionsperiode gegeben ist, innerhalb jedes Jahres - abgesehen von zufälligen Schwankungen - die Prozesse gleich ablaufen können und Outputs eines früheren Jahres als Input in einem späteren verwendet werden können.

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein einfaches Beispiel! es können zwei Prozesse mit den Intensitäten x und y betrieben werden. Sie brauchen die Mengen ax und bx , bzw. Ay und By zweier Faktoren, von denen der erste Output der Prozesse der Vorperiode ist: cx und Cy seien die Mengen. Ausserdem wird ein Gut in den Mengen dx und Dy produziert. Es soll ein Produktionsplan für drei Perioden aufgestellt werden. Die in jeder Periode verfügbare Menge des zweiten Faktors sei β , die anfangs verfügbare Menge des ersten Faktors α . Die x und y erhalten als Indizes die Periode, für die sie gelten. Dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{array}{rcl}
 ax_1 + Ay_1 & \leq & \alpha \\
 bx_1 + By_1 & \leq & \beta \\
 -cx_1 - Cy_1 + ax_2 + Ay_2 & \leq & 0 \\
 (15) \quad bx_2 + By_2 & \leq & \beta \\
 -cx_2 - Cy_2 + ax_3 + Ay_3 & \leq & 0 \\
 bx_3 + By_3 & \leq & \beta \\
 -cx_3 - Cy_3 & \leq & 0
 \end{array}$$

Der gesamte Output des Produktes, der maximiert werden soll, ist

$$(16) \quad z = d \sum x_i + D \sum y_i.$$

Wegen der äusseren Form der Bedingungen (15) heissen sie 'gestaffelt'. Es sind besondere Lösungsverfahren vorgeschlagen, die dies ausnutzen¹⁾.

1) G.B.Dantzig, Upper Bounds, Secondary Constraints and Block Triangularity in Linear Programming. *Econometrica* 23 (1955) 174-183.
 -, On the Status of Multistage Linear Programming Problems. *Management Science* 6 (1959) 53-72.

Das Verfahren lässt sich überall dort anwenden, wo eine Aufgliederung in Perioden zwangslos möglich ist, innerhalb der Perioden keine zeitlichen Bedingungen zu beachten sind und zwischen den Perioden Beziehungen nur über die Input- und Outputmengen bestehen. Ein interessantes praktisches Beispiel ist das Problem der 'Luftbrücke'.¹⁾

3.3 Optimale Erfüllung eines Fahrplans²⁾

Ein Fahrplan fordert, dass zu bestimmten Zeiten $t_{ij}^1, t_{ij}^2 \dots$ von bestimmten Abgangs- (i) zu Bestimmungsorten (j) Fahrzeuge fahren. Die Reisezeiten a_{ij} sind bekannt, ebenfalls die Rückreisezeiten b_{ij} für die leeren Fahrzeuge. Es soll ein Fahrplan für die leeren Fahrzeuge so aufgestellt werden, dass man mit einer minimalen Gesamtzahl der Fahrzeuge auskommt.

Aus den t_{ij}^k und den a_{ij} errechnet man die Ankunftszeiten $T_{ij}^k = t_{ij}^k + a_{ij}$. Man betrachtet nun die Versandorte i als nach den Abgangszeiten t und die Empfangsorte j nach den Ankunftszeiten T aufgegliedert und führt Variable x_{Tjti} ein, die die Zahl der Fahrzeuge angeben, die zur Zeit T in j ankommen und zur Zeit t in i abgegangen sind.

Aus dem Fahrplan kann man entnehmen, wieviel Fahrzeuge n_{ti} zur Zeit t in i abfahren und wieviele N_{Tj} zur Zeit T in j ankommen. Es sollen nicht mehr Fahrzeuge versandt werden, als am Bestimmungsort gebraucht werden, und es können nicht mehr versandt werden, als überhaupt ankommen. Also:

$$(17) \quad \sum_{Tj} x_{Tjti} \leq n_{ti}$$

$$(18) \quad \sum_{ti} x_{Tjti} \leq N_{Tj}$$

Ausserdem muss gelten:

$$(19) \quad x_{Tjti} = 0 \quad \text{wenn } t - T < b_{ij},$$

weil sonst die Zeit für die Fahrt von j nach i zu kurz ist. Ergänzt man die Ungleichung (17) durch eine Schlupfvariable x_{ti} zu einer Gleichung

$$(20) \quad \sum_{Tj} x_{Tjti} + x_{ti} = n_{ti},$$

so ist x_{ti} die Zahl der Fahrzeuge, die zur Zeit t in i neu eingesetzt werden müssen; da jedes Fahrzeug einmal eingesetzt wird, ist

$$(21) \quad \sum_{ti} x_{ti} = z$$

die Gesamtzahl, die minimiert werden soll.

1) M.K.Wood, M.A.Geisler, Development of Dynamic Models for Program Planning. In: T.C.Koopmans (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation. New York, London 1951 S. 189-215. 2) Siehe folgende Seite

Bis auf die Bedingung (19) ist dies ein lineares Programm. Ordnet man den nach (19) verbotenen x_{Tjti} sehr hohe Koeffizienten M zu, dann verschwinden sie beim Minimieren von

$$(22) \quad z' = \sum_{ti} x_{ti} + \sum' x_{Tjti}$$

(Σ' ist über die $Tjti$ zu bilden, die unter die Bedingung (19) fallen), und ausserdem wird z minimiert. (18), (20) und (22) bilden also ein gewöhnliches lineares Programm, und zwar eins besonders einfacher Struktur: ein Transportproblem. Bei ihm ist übrigens bei ganzzahligen n und N die Ganzzahligkeit der x automatisch gesichert. Die x_{Tjti} mit T und t , die nicht als Abfahrts- und Ankunftszeiten auftreten, und ebenso die entsprechenden Bedingungen kann man weglassen; dadurch verringert sich der Umfang des Problems.

3.4 Ein Maschinen-Belastungs-Problem¹⁾

Eine Firma hat n Produktionen i auf m Maschinen j durchzuführen. Die für die Produktionsvorgänge benötigten Zeiten seien $T(i,j)$. Zur Beschreibung des Produktionsplans teilt man die Produktionsperiode in hinreichend kleine Zeitintervalle $t = 1, 2, \dots$ ein. Wird das Produkt i auf j zur Zeit t bearbeitet, dann sei eine Hilfsvariable $z(i,j,t) = 1$, sonst 0. Da jeweils nur höchstens ein Produkt auf einer Maschine bearbeitet werden kann, muss

$$(23) \quad \sum_1 z(i,j,t) \leq 1$$

sein. Ein Produkt kann immer nur jeweils auf höchstens einer Maschine sein:

$$(24) \quad \sum_j z(i,j,t) \leq 1$$

Schliesslich muss jedes Produkt die nötige Zeit $T(i,j)$ bearbeitet werden:

$$(25) \quad \sum_t z(i,j,t) = T(i,j).$$

Damit die Produkte in der vorgeschriebenen Reihenfolge über die Maschinen laufen, z.B. auf j erst nach Bearbeitung auf k , fordert man:

$$(26) \quad z(i,j,t) + z(i,j,t-p) \leq 1 \quad p = 1 \dots t.$$

G.B.Dantzig, D.R.Fulkerson, Minimizing the Number of Tankers to Meet a Fixed Schedule. Naval Research Logistics Quarterly 1 (1954) S. 217-222.

1) W.Krelle, Ganzzahlige Programmierung. Theorie und Anwendungen in der Praxis. Unternehmensforschung 2 (1958) 161-175. Beispiel 9.

Ziel des Planes ist es, die Produktion möglichst schnell zu beenden. Dazu führt man Koeffizienten $c(i,j,t) > 0$ ein, für die gilt

$$c(i,j,t+1) > c(i,j,t),$$

und fordert,

$$(27) \quad z = \sum_{i,j,t} c(i,j,t)z(i,j,t)$$

zu minimieren. Dadurch, dass die c mit wachsendem t grösser werden, soll gesichert werden, dass die z mit kleinerem t in einer optimalen Lösung bevorzugt auftreten und dadurch die Produktion möglichst schnell abgewickelt wird.

Die Bedingungen (23) - (26) liefern aber nur dann einen brauchbaren Produktionsplan, wenn die einzelnen Produktionen zeitlich teilbar sind. Es fehlt nämlich eine Bedingung, die fordert, dass die Bearbeitung eines Produktes i auf einer Maschine j in $T(i,j)$ aufeinanderfolgenden Zeitintervallen zu erfolgen hat. Auch beim Minimieren von z kann dies nicht erzwungen werden.

Die Minimierung von z bestimmt nur dann das Programm mit frühester Abwicklung aller Aufträge, wenn jedes $c(i,j,t)$ so erheblich grösser als alle mit kleinerem t ist, dass jeweils nur das grösste in der Summe eine Rolle spielt. Dies ist in konkreten Beispielen mit Zahlenwerten nur sehr schwer zu realisieren. Der Anwendungsbereich dieses Modells ist daher beschränkt.

4 Ein allgemeines Linear-Programming-Modell mit zeitlichen Bedingungen

Die Beispiele von linearen Programmen mit zeitlichen Bedingungen, die im vorigen Abschnitt gebracht wurden, hatten alle gemeinsam, dass die Zeit in feste Intervalle aufgegliedert wurde, die so klein waren, dass innerhalb der Intervalle keine Bedingungen für die zeitliche Verknüpfung der Prozesse zu beachten waren. Hat das Problem eine natürliche Gliederung in feste Zeitintervalle (Beispiele 3.2 und 3.3), dann ist das Verfahren naheliegend und angemessen. Dauern dagegen die einzelnen Prozesse verschieden lange, (Beispiel 3.4), dann ist eine sehr weitgehende Aufgliederung des Zeitraums nötig, um Beginn und Ende der einzelnen Arbeitsgänge hinreichend genau festzulegen. Dadurch wird die Zahl der Bedingungen

sehr gross. In manchen Problemen (Beispiel 2.3) kann man leicht erkennen, welche Bedingungen nicht wirksam werden und diese dann fortlassen.

Für den allgemeinen Fall verschieden lang dauernder, nicht an feste Zeitintervalle gebundener Prozesse ist es aber günstig, von der im Abschnitt 2.3 gezeigten Möglichkeit Gebrauch zu machen, und die logischen Verknüpfungen, die den Ablauf der Produktionsvorgänge regeln (wenn/dann; entweder/oder-Bedingungen) in das lineare Programm in Form zusätzlicher Bedingungen einzuarbeiten.

4.1 Formulierung des Problems

Wir wollen nun ein möglichst allgemeines Planungsmodell mit zeitlichen Bedingungen aufstellen, das sich in die Form eines linearen Programms bringen lässt. Zur Veranschaulichung benutzen wir das Modell einer Planung eines Betriebes; das ist, wie in 2.1 ausgeführt, keine Einschränkung des Anwendungsbereichs, da wir das Modell auch abstrakt - dann allerdings weniger leicht verständlich und auch in vielen Fällen weniger leicht in die Praxis übersetzbar - formulieren könnte.

Ein Betrieb stellt n Produkte i auf m Maschinen j her. Für jedes Produkt ist vorgeschrieben, auf welchen Maschinen es bearbeitet werden soll; die Reihenfolge kann dabei entweder ganz oder teilweise festgelegt sein. Auch die alternativen Möglichkeiten der Herstellung auf verschiedenen Maschinen oder Maschinengruppen dürfen vorhanden sein. Werden für die Bearbeitung auf bestimmten Maschinen beschränkt vorhandene Mengen von Roh- oder Hilfsstoffen benötigt, dann kann dies berücksichtigt werden. Ein brauchbares Programm muss einen realisierbaren Zeitablauf der Produktionsvorgänge liefern; ausserdem können zeitliche Beschränkungen einzelner Maschinen berücksichtigt werden: z.B., dass die Bearbeitung auf manchen Maschinen nicht vor bestimmten Terminen beginnen kann, sei es, dass die nötigen Rohstoffe nicht früher geliefert werden können, sei es, dass die Maschinen durch andere, nicht im Programm berücksichtigte Arbeiten besetzt sind, oder dass Maschinen wegen Wartungsarbeiten für bestimmte Zeiten ausfallen. Ebenso kann man fordern, dass die Produkte zu vorgegebenen Terminen fertig sind.

Schon die Bestimmung eines Produktionsplans, der alle Bedingungen

erfüllt, ist keine ganz einfache Aufgabe. Sie wird aber erleichtert, wenn man sie in den Rahmen des scheinbar erheblich komplizierteren Problems, den besten Produktionsplan zu bestimmen, stellt. Bei der Lösung dieses Problems nach den Methoden des linearen Programmierens erhält man ganz automatisch das Resultat, ob ein Programm überhaupt erfüllbar ist oder nicht.

Für die Auswahl des 'besten' Programms muss man eine lineare Funktion als Kriterium haben. Diese Funktion kann man durch geeignete Definition der Koeffizienten - wodurch man nicht nur die gewünschten Variablen in die Zielfunktion aufnehmen, sondern sie auch gewichten kann - weitgehend den praktischen Fragestellungen anpassen. So kann man z.B. das Ziel setzen, ein bestimmtes Produkt zu einem möglichst frühen Termin fertigzustellen. Man kann auch die Termine der Fertigstellung mehrerer Produkte verschieden bewerten, etwa mit Konventionalstrafen bei Verspätungen, mit Lagerkosten negativ, evtl. aber auch mit Gewinn an 'good will' bei früherer Fertigstellung, und die Summe als Kriterium wählen. Man kann fordern, dass die gesamten Leerlaufzeiten der Maschinen, evtl. gewichtet mit geeigneten Kostenfaktoren, minimiert werden. Man kann auch die Herstellungskosten bei verschiedenen Verfahren berücksichtigen und entscheiden, ob ein teureres Produktionsverfahren zur Einhaltung von Terminen benutzt werden muss. Man kann auch - bei Produktion für den freien Verkauf und nicht auf Bestellung - die Produktmengen so zu bestimmen suchen, dass die gesamte Produktion einen möglichst hohen Gewinn abwirft. All diese Möglichkeiten bietet eine lineare Zielfunktion der Variablen. Wie schon oben (2.1) erwähnt, kann man durch geeignete Zerlegung von bestimmten Prozessen mit nichtlinearen Zielfunktionen manche nichtlineare Probleme auf lineare zurückführen. Dies kann z.B. dann der Fall sein, wenn der betrachtete Betrieb mit einem Produkt einen hohen Marktanteil hat, so dass der Preis von der hergestellten Menge beeinflusst werden kann.

4.2 Probleme mit ganzen Produktmengen

Das im Abschnitt 4.1 formulierte Problem soll nun in einigen Punkten genauer festgelegt und gelöst werden¹⁾. Die Produkte werden in

1) Das hier (4.2) dargestellte Modell ist eine Verallgemeinerung des in folgender Arbeit beschriebenen: H.M.Wagner, An Integer Linear Programming Model for Machine Scheduling. Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959) 131- 140.

unteilbaren Mengen hergestellt. Es kann sich z.B. um Einzelstücke handeln, die nicht unterteilt werden können, es kann sich aber auch um an sich teilbare Mengen handeln, die aus - ausserhalb des Modells liegenden - ökonomischen oder technischen Gründen nicht geteilt werden sollen.

Die Reihenfolge der Arbeitsgänge auf den verschiedenen Maschinen für die einzelnen Güter sei in Tabelle 1 angegeben. Dabei sei vorerst vorausgesetzt, dass jeder Auftrag höchstens einmal auf jeder Maschine bearbeitet wird.

Tabelle 1:

	Arbeitsgang				
	1		1		m_1 m
Produkt	1	j_{11}	...	j_{11}	
	..				
	i	j_{i1}	...	j_{i1}	... j_{im_1}
	..				
n	j_{n1}	...	j_{n1}		

j_{i1} ist die Maschine, auf der das Produkt i im 1-ten Arbeitsgang bearbeitet wird. m_1 ist die Gesamtzahl der Arbeitsgänge für das i-te Produkt.

Abb.10 veranschaulicht ein Stück des Produktionsplans: auf der Maschine j_1 wird an k_{j_1} -ter Stelle das Produkt i_1 bearbeitet, als nächstes $(k_{j_1}+1)$ das Produkt i_2 und dann als $(k_{j_1}+2)$ -tes das Pro-

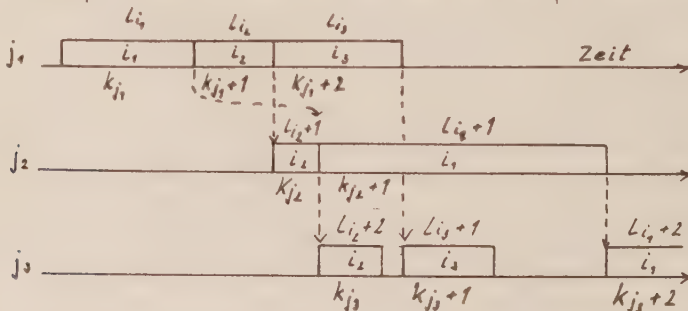


Abbildung 10

dukt i_3 . Das Produkt i_1 ist im 1_{j_1} -ten Arbeitsgang auf j_1 bearbeitet worden, im folgenden $1_{j_1}+1$ kommt es - was aus Tabelle 1 zu entnehmen ist - auf j_2 und dann auf j_3 . Entsprechendes gilt für die anderen Maschinen und Produkte.

Zur rechnerischen Behandlung des Produktionsablaufs führt man Größen $y(i,j,k)$ ein, die nur die Werte 0 und 1 annehmen dürfen. Wird das Produkt i an k -ter Stelle auf der Maschine j bearbeitet, dann ist $y(i,j,k) = 1$. Für das Beispiel der Abb.10 sind die $y(i,j,k)$:

$$\begin{aligned} y(i_1, j_1, k_{j_1}) &= 1 \\ y(i_1, j_2, k_{j_1} + 1) &= 1 \\ y(i_1, j_3, k_{j_1} + 2) &= 1 \\ y(i_2, j_1, k_{j_1} + 1) &= 1 \\ y(i_2, j_2, k_{j_2}) &= 1 \\ y(i_3, j_1, k_{j_1} + 2) &= 1 \\ y(i_3, j_3, k_{j_3} + 1) &= 1, \end{aligned}$$

alle übrigen verschwinden.

Die Bedingung, dass ein Produkt für jede Maschine, auf der es bearbeitet werden soll, auch eingeplant wird, lautet

$$(28) \quad \sum_k y(i,j,k) = 1.$$

Da eine Maschine nicht gleichzeitig mehrere Produkte bearbeiten kann, wird gefordert, dass ihr im k -ten Arbeitsgang höchstens ein Produkt zugeteilt ist:

$$(29) \quad \sum_i y(i,j,k) \leq 1.$$

Die $\leq$ -Bedingung muss zugelassen werden, da bei alternativen Produktionsmöglichkeiten nicht von vornherein festliegt, wieviele Arbeitsgänge auf einer Maschine geleistet werden müssen; für alle k , die grösser als das letzte sind, muss die Summe also verschwinden.

Um die Bedingungen für die zeitliche Verflechtung der Arbeitsprozesse aufstellen zu können, führen wir weitere Variable ein: $s(j,k) \geq 0$ sei die Zeit des Beginns des k -ten Arbeitsgangs auf der Maschine j , $r(j,k) \geq 0$ die auf die Bearbeitung des k -ten Arbeitsganges folgende Leerlaufzeit bis zum Beginn des $k+1$ -ten. Die bekannten Bearbeitungszeiten der Produkte auf den einzelnen Maschinen seien in einer Tabelle 2 gegeben.

Abb.11 veranschaulicht den Zeitablauf auf einer Maschine j . Es gilt offensichtlich (46):

$$(46) \quad s(j,k) = \sum_{p=0}^{k-1} (r(j,p) + \sum_i y(i,j,p)t(i,j))$$

Tabelle 2:

	Maschine	
	1	j.....
Produkt	1	$t(1,1) \dots t(1,j) \dots$
	...	
	i	$t(i,1) \dots t(i,j) \dots$
	...	

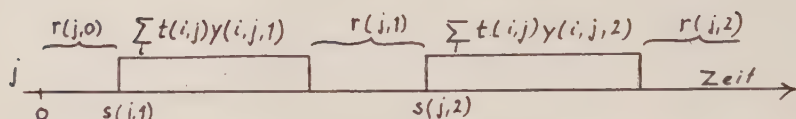


Abbildung 11

Die Summe über i ist dabei einfach die Zeit, die das als p -tes bearbeitete Produkt auf der Maschine j braucht. Die Summenbildung ist nötig, da von vornherein nicht bekannt ist, welches Produkt als p -tes auf die Maschine kommt.

Bedingung für den reibungslosen Ablauf der Produktion ist, dass die einzelnen Arbeitsgänge für ein Produkt richtig hintereinander geplant sind. Tab.3 zeigt einen Ausschnitt aus Tab.1: Das Produkt i wird im 1-ten Arbeitsgang auf Maschine j_1 und im $(1+1)$ -ten auf Tabelle 3:

	Arbeitsgang	
	 1	1+1
Produkt	...	
	i	 j_1 j_2
	...	

Maschine j_2 bearbeitet. Die zu erfüllende Bedingung ist dann nach Abb.12

$$(31) \quad s(j_1, k_{j_1}) + t(i, j_1) \leq s(j_2, k_{j_2})$$

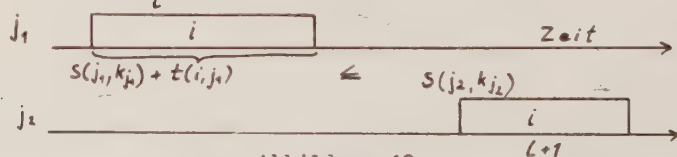


Abbildung 12

(Falls der Transport von j_1 nach j_2 Zeit benötigt, kann man sie auf der linken Seite addieren.) Die k_{j_1} und k_{j_2} sind dadurch bestimmt, dass für sie

$$(32) \quad y(i, j_1, k_{j_1}) = 1 \quad \text{und} \quad y(i, j_2, k_{j_2}) = 1$$

gilt, während die y für alle anderen k verschwinden. Da man von

vornherein nicht weiss, welches die k_{j_1} und k_{j_2} sind, muss man die Bedingung (31) für beliebige k formulieren und so ändern, dass sie für andere k als die mit $y(i, j_1, k) = 1$ und $y(i, j_2, k)$ keine Beschränkung darstellt. Das leistet

$$(33)^{1)} s(j_1, k) + t(i, j_1) \leq s(j_2, k) + M(1 - y(i, j_1, k)) + M(1 - y(i, j_2, k)),$$

wo M einen hinreichend grossen Wert hat. Verschwindet nämlich mindestens ein y , dann wird die rechte Seite so gross, dass sie praktisch keine Beschränkung darstellt.

Damit sind alle Bedingungen aufgestellt, die für dieses einfache Modell eine realisierbare Produktionsplanung sichern.

Eine erste Verallgemeinerung nehmen wir vor, indem wir zulassen, dass ein Produkt auch mehrfach auf einer Maschine bearbeitet werden kann: auf der Maschine j $K(j)$ -mal. Dann ist die Bedingung (28) zu ersetzen durch

$$(34) \sum_k y(i, j, k) = K(j),$$

durch die gesichert wird, dass genau $K(j)$ der y gleich 1 und die übrigen gleich 0 werden.

In Tabelle 2 stehen dann für die betreffenden Maschinen und Produkte mehrere Zeiten: $t(i, j, 1), t(i, j, 2) \dots t(i, j, K(j))$; die Reihenfolge sei die der Arbeitsgänge. Der Einfachheit halber schreiben wird die folgenden Bedingungen nur für zwei Arbeitsgänge auf derselben Maschine. Der entsprechende Ausschnitt aus Tabelle 1 ist in Tabelle 4 wiedergegeben. Bedingungen wie (33) müssen jetzt beim Ueber-

Tabelle 4:

		Arbeitsgänge			
		 1	1+1	 1'	1'+1
Produkt	...				
	1	 j_1	j_2	 j_1	j_3
	...				

gang von 1 nach 1+1 und von 1' nach 1'+1 erfüllt sein, das erste Mal mit $t(i, j_1, 1)$, das zweite Mal mit $t(i, j_1, 2)$, also

$$(35) s(j_1, k) + t(i, j_1, 1) \leq s(j_2, k) + M(1 - y(i, j_1, k)) + M(1 - y(i, j_2, k))$$

$$(36) s(j_1, k') + t(i, j_1, 2) \leq s(j_3, k') + M(1 - y(i, j_1, k')) + M(1 - y(i, j_3, k'))$$

Damit die $t(i, j_1, 1)$ und $t(i, j_1, 2)$ auch in der richtigen Reihenfolge den Arbeitsgängen zugeordnet werden, muss $s(j_1, k') > s(j_1, k)$ sein.

1) Diese Formel ist gleichwertig mit der Formel (8) bei Wagner, l.c. Der bei ihm auf der linken Seite auftretende Faktor $x_{ij}^{(k)}$ von $t_{ij}^{(k)}$ (unser $t(i, j, k)$), der gleich unserem $y(i, j, k)$ ist, ist aber überflüssig.

(41) sichert, dass genau $g - f$ der z gleich 1 sind, daher verschwinden in genau $g - f$ der Bedingungen (40) die rechten Seiten und es können nur f der $y(i, j_h, k)$ für verschiedene j_h gleich j sein.

Da die Gruppe G in Tabelle 1 an Stelle einer Maschine j getreten ist, gibt (33) keine Bedingung für den zeitlichen Arbeitsablauf innerhalb der Gruppe. Wir müssen also noch Bedingungen der Form (33) aufstellen, dabei aber beachten, dass die Reihenfolge der Bearbeitung innerhalb der Gruppe gleichgültig ist. Wir stellen also zwei von der Form (33) auf, von denen jeweils nur eine erfüllt ist. Die folgenden Bedingungen, (42), leisten dies. u ist eine Hilfsvariable, die

(42) $s(j_1, k) + t(i, j_1) \leq s(j_2, k) + M(1 - y(i, j_1, k)) + M(1 - y(i, j_2, k)) + Mu$
 $s(j_2, k) + t(i, j_2) \leq s(j_1, k) + M(1 - y(i, j_2, k)) + M(1 - y(i, j_1, k)) + M(1 - u)$
 nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Ist $u = 0$, dann wird die erste Bedingung wirksam (falls sie nicht unwirksam ist, weil i nicht auf k -ter Stelle auf j_1 bearbeitet wird) und i wird zuerst auf j_1 , dann auf j_2 bearbeitet. Ist $u = 1$, dann wird nur die zweite Bedingung wirksam und die Reihenfolge der Maschinen ist umgekehrt.

Wenn man bei bestimmten Arbeitsgängen zwischen mehreren Maschinen wählen kann, kann es vorkommen, dass diese Auswahlmöglichkeiten nicht unabhängig sind: d.h., hat man in einem bestimmten Arbeitsgang eine bestimmte Maschine gewählt, dann kann damit die Wahl in einem anderen beschränkt oder sogar festgelegt sein. Die Berücksichtigung einer solchen Bedingung zeigen wir an einem einfachen Beispiel. Bei der Herstellung eines Produktes 1 können in einem Arbeitsgang wahlweise die Maschinen j_1 oder j_2 , in einem anderen j_3 oder j_4 eingesetzt werden, mit der Einschränkung, dass, wenn j_1 gewählt wurde, j_3 gewählt werden muss, und dass, wenn j_2 gewählt wurde, j_4 gewählt werden muss. Nehmen wir an, dass das Produkt auf jeder Maschine höchstens einmal bearbeitet wird, dann bedeutet die Wahl von j_1 :

$$(43) \quad \sum_k y(i, j_1, k) = 1$$

und

$$(44) \quad \sum_k y(i, j_2, k) = 0.$$

Daraus soll folgen, dass für genau ein k gilt: $y(i, j_3, k) = 1$ und für alle anderen k $y(i, j_4, k) = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$(45) \quad \sum_k y(i, j_3, k) = 1$$

und

$$(46) \quad \sum_k y(i, j_4, k) = 0$$

Fasst man (43) mit (45) und (44) mit (46) zusammen, dann kann man schreiben

$$(47) \quad \sum_k y(i, j_1, k) = \sum_k y(i, j_3, k)$$

und

$$(48) \quad \sum_k y(i, j_2, k) = \sum_k y(i, j_4, k)$$

Für den Fall, dass man j_2 wählt, gelten genau die Bedingungen (43)... (46) mit vertauschten 0 und 1 auf den rechten Seiten. Die Bedingungen (47) und (48) behalten aber ihre Form. Sie lassen sich leicht auf mehrere Wahlmöglichkeiten verallgemeinern.

Kompliziertere Bedingungen bei alternativen Produktionsmöglichkeiten kann man ähnlich wie in den beschriebenen Fällen unter Ausnutzung der im Abschnitt 2.3 gezeigten Möglichkeiten aufstellen. Dabei ist aber zu prüfen, ob das Aufstellen komplizierterer Bedingungen sinnvoll ist, oder ob man nicht besser den oben genannten Weg geht, die einzelnen Herstellungsmöglichkeiten aufzuzählen und als Herstellung verschiedener Produkte zu behandeln.

Die bisher aufgestellten Forderungen waren durch die Produktionstechnik bedingt. Praktisch beschränken oft noch die verfügbaren Mengen von Roh- und Betriebsstoffen und die Arbeits- und Maschinenzeiten die möglichen Produktionspläne. Beschränkungen der ersteren Art sind sehr leicht zu berücksichtigen, wenn die für ein Produkt benötigten Roh- und Betriebsstoffe unabhängig vom Herstellungsverfahren in bestimmten Mengen benötigt werden. Dann braucht man nur zu prüfen, ob die Summe aller Einzelmengen nicht grösser als die Gesamtmenge und damit das Programm nicht realisierbar ist. Brauchen dagegen die verschiedenen Herstellungsverfahren verschiedene Mengen, dann ist die Bedingung nicht so einfach zu berücksichtigen.

Hat man die alternativen Herstellungsmöglichkeiten durch Mehrfachzählung der Produkte, nach den Herstellungsverfahren getrennt, berücksichtigt, dann kann man die von dem Produkt i verbrauchte Menge $x(i)a(f,i)$ angeben und eine Beschränkung der Gesamtmenge als

$$(49) \quad \sum_i x(i)a(f,i) \leq A(f)$$

schreiben.

Hat man dagegen alternative Möglichkeiten durch Einführung von Be-

dingungen zwischen den einzelnen Arbeitsgängen berücksichtigt, dann muss man auch den Verbrauch nach den benutzten Arbeitsgängen aufgliedern und für die benutzten summieren. Ist das Produkt i auf der Maschine j bearbeitet, dann ist das durch

$$(50) \quad \sum_k y(i, j, k) = 1$$

ausgedrückt. Ist der Verbrauch des Faktors f bei diesem Arbeitsgang $a(f, i, j)$, dann ist die Bedingung wegen beschränkter Gesamtmenge

$$(51) \quad \sum_{i, j} a(f, i, j) \sum_k y(i, j, k) \leq A(f) \quad .$$

Diese Bedingungen sind genau die auch bei einfachen linearen Modellen auftretenden. Typisch für unser Modell sind dagegen Bedingungen der anderen Art, die die Zeiten betreffen.

Eine sehr einfache derartige Bedingung ist die häufig auftretende, dass ein Produkt zu einem bestimmten Termin fertig sein soll. Es soll z.B. Produkt i zum Termin $\bar{S}$ fertig sein. Aus Tabelle 1 entnimmt man, dass i im letzten Arbeitsgang $l = m_i$ auf der Maschine j_{m_i} bearbeitet wird. Die Ordnungsnummer k des Auftrags i auf dieser Maschine ist dadurch bestimmt, dass genau für sie

$$(52) \quad y(i, j_{m_i}, k) = 1$$

ist (wenn i nur einmal auf j_{m_i} bearbeitet wird). Die Bearbeitung beginnt zur Zeit $s(j_{m_i}, k)$ und ist $t(i, j_{m_i})$ später beendet. Bedingung für die rechtzeitige Beendigung der Produktion ist

$$(53) \quad s(j_{m_i}, k) + t(i, j_{m_i}) \leq \bar{S} \quad .$$

Sie soll nur für das k wirksam sein, für das (52) gilt, man schreibt sie dazu

$$(54) \quad s(j_{m_i}, k) + t(i, j_{m_i}) \leq \bar{S} + M(1 - y(i, j_{m_i}, k)) \quad \text{für alle } k.$$

Wird ein Produkt mehrfach auf der Maschine bearbeitet, auf der es zuletzt bearbeitet wird, dann setzt man diese Bedingung mit der Zeit $t(i, j_{m_i}, K(i))$ an, die der letzte Arbeitsgang braucht:

$$(55) \quad s(j_{m_i}, k) + t(i, j_{m_i}, K(i)) \leq \bar{S} + M(1 - y(i, j_{m_i}, k)) \quad .$$

Da sie für alle k gilt, gilt sie auch für das letzte, K , sichert also die rechtzeitige Fertigstellung. Da für alle Bearbeitungsstufen dieses Produktes auf j_{m_i} gilt

$$(56) \quad s(j_{m_i}, k) < s(j_{m_i}, K) \quad ,$$

schränkt sie die übrigen Arbeitsgänge aber nicht ein.

Es kann vorkommen, dass einzelne Maschinen nicht ununterbrochen die ganze Planungsperiode zur Verfügung stehen, z.B. weil die Arbeitszeit durch Wartungsarbeiten unterbrochen werden muss, oder weil sie festgelegte, ausserhalb des zu untersuchenden Programms liegende Aufträge zu bearbeiten haben. Die Zeitintervalle, in denen eine bestimmte Maschine j zur Verfügung steht, seien .

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(j) &\dots \bar{s}_1(j) \\ \underline{s}_2(j) &\dots \bar{s}_2(j) \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{s}_q(j) &\dots \bar{s}_q(j) . \end{aligned}$$

Für das k -te Werkstück auf dieser Maschine dauert die Bearbeitung von $s(j,k)$ bis $s(j,k+1) - r(j,k)$. Diese Zeit muss ganz in einem der Intervalle $\underline{s}_p(j) \dots \bar{s}_p(j)$ liegen, d.h., es muss gelten

$$(57) \quad s(j,k) \geq \underline{s}_p(j)$$

und

$$(58) \quad s(j,k+1) - r(j,k) \leq \bar{s}_p(j) .$$

Dies gilt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (59) \quad &s(j,k) \geq \underline{s}_1(j)v(j,k,1) \\ &\dots\dots\dots \\ &s(j,k) \geq \underline{s}_p(j)v(j,k,p) \\ &\dots\dots\dots \\ &s(j,k) \geq \underline{s}_p(j)v(j,k,q) \\ &s(j,k+1)-r(j,k) \leq \bar{s}_1(j) + M(1-v(j,k,1)) \\ &\dots\dots\dots \\ (60) \quad &s(j,k+1)-r(j,k) \leq \bar{s}_p(j) + M(1-v(j,k,p)) \\ &\dots\dots\dots \\ &s(j,k+1)-r(j,k) \leq \bar{s}_q(j) + M(1-v(j,k,q)) . \end{aligned}$$

und

$$(61) \quad \sum_p v(j,k,p) = 1 ,$$

wo die Hilfsvariable $v(j,k,p)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen soll. Die Gleichung (61) sichert, dass genau ein $v(j,k,p) = 1$ ist und die übrigen verschwinden. Also wird von den Bedingungen (59) und (60) jeweils nur genau die p -te wirksam.

Betrachten wir nun die Zielfunktion! Ein sehr einfaches und häufig auftretendes Ziel ist es, ein bestimmtes Produkt i möglichst früh fertig zu stellen. Da die Bearbeitungszeit auf jeder Maschine festliegt, kann man statt dessen fordern, dass der letzte Arbeitsgang möglichst früh beginnt. Ist m_i der letzte Arbeitsgang für das Produkt i , der auf der Maschine j_{m_i} durchgeführt wird, dann soll

$s(j_{m_i}, k)$ minimiert werden, wo k durch $y(i, j_{m_i}, k) = 1$ bestimmt ist.

Das ist genau gleich der Summe

$$(62) \quad \sum_k s(j_{m_i}, k) y(i, j_{m_i}, k) .$$

Diese Funktion ist aber nicht mehr linear in beiden Variablen s und y und kann daher nicht ohne zusätzliche Ueberlegungen in einem linearen Programm untersucht werden. Diese Schwierigkeit kann man durch einen einfachen Kunstgriff umgehen, wenn man bedenkt, dass die nicht-lineare Form von (62) nur dadurch bedingt ist, dass k unbekannt ist, d.h., man nicht weiss, als wievielles das Produkt zuletzt bearbeitet wird. Man führt einen fiktiven m_i+1 ten Arbeitsgang auf einer fiktiven Maschine j_0 ein, in dem das Produkt ohne Zeitaufwand 'fertiggestellt' wird (obwohl es physisch bereits fertig ist). Dann weiss man, dass das Produkt zuletzt auf j_0 bearbeitet wird. Da dies der einzige Arbeitsgang ist, der auf j_0 überhaupt vorkommt, genügt es, $s(j_0, 1)$ zu minimieren. Dieses Verfahren ist auch dann vorteilhaft, wenn ein Produkt auf verschiedenen Maschinen fertiggestellt werden kann, weil dann der allerletzte Arbeitsgang auf einer bestimmten, nämlich der fiktiven, Maschine durchgeführt werden kann.

Eine andere Möglichkeit, die unter Umständen nützlich sein kann, besteht darin, das Problem mit einer beliebigen anderen Zielfunktion zu lösen und $\bar{S}$ in (53) als von einem Parameter abhängig anzusehen. Mittels der Techniken des parametrischen linearen Programmierens kann man dann bestimmen, für welchen kleinsten Wert von $\bar{S}$ das Problem überhaupt noch eine realisierbare Lösung hat; dies ist das Minimum von $\bar{S}$. Dies Verfahren hat den Vorteil, dass man z.B. in Verbindung mit einer der weiter unten genannten Zielfunktionen die Kosten ermitteln kann, die eine möglichst frühe Fertigstellung eines Auftrags verursacht, und dass man so entscheiden kann, welcher früheste Termin wirtschaftlich noch sinnvoll ist.

In Verbindung mit einer fiktiven Maschine kann man dieses Verfahren auch benutzen, wenn der letzte Arbeitsgang auf mehreren Maschinen durchgeführt werden kann.

Sollen alle oder wenigstens viele Produkte möglichst früh fertig werden, dann muss man eine Linearkombination, die einem gewichteten Mittel entspricht, der Zeiten bilden. Die Festsetzung der Koeffizienten kann z.B. nach subjektiven Gesichtspunkten erfolgen.

Sind dagegen mit den Zeiten der Fertigstellung objektive und ver-

gleichbare Merkmale verbunden, z.B. Konventionalstrafen bei Verspätung und bei früherer Fertigstellung zusätzliche Lagerkosten, dann kann man eine objektive Zielfunktion aufstellen. Es seien c die bei Verspätung, c' die bei früherer Fertigstellung je Zeiteinheit entstehenden Kosten. Man definiert neue Variable $\sigma \geq 0$ und $\sigma' \geq 0$ mittels der Gleichung

$$(63) \quad s(j_0, 1) - \bar{s} = \sigma - \sigma'.$$

Wir behaupten, dass $\sigma > 0$ und $\sigma' = 0$ ist, wenn der Termin $\bar{s}$ überschritten wird und dass $\sigma' > 0$ und $\sigma = 0$ ist, wenn die Arbeit vor dem Termin fertiggestellt ist, falls $c \geq 0$ und $c' \geq 0$ ist. Dies ist offensichtlich aus Abb. 13, in der die Geraden $\sigma - \sigma' = \text{const.}$ und die Ebenen der Zielfunktion

$$c\sigma + c'\sigma' = z$$

eingezeichnet sind, da beim Lösen des Programmierungsproblems die Zielfunktion minimiert wird.



Abbildung 13

Ist dagegen mit der früheren Fertigstellung ein Vorteil verbunden (etwa Zinsgewinn bei früherem Empfang des Erlöses), dann erhält σ' einen negativen Koeffizienten. Abb. 14 stellt die Verhältnisse dar. Im Falle $c > c'$ (Abb. 14a) erzwingt das Minimieren von z ebenfalls automatisch, dass bei $\sigma - \sigma' > 0$ $\sigma' = 0$ und $\sigma \geq 0$ und bei $\sigma - \sigma' < 0$ $\sigma = 0$ wird. Im Falle $c < c'$ dagegen (Abb. 14b) würde das lineare Programmieren einen unbeschränkt niedrigen Wert von z bei unendlichen σ und σ' mit fester endlicher Differenz geben. Man muss dann noch eine zusätzliche Bedingung einführen, die garantiert, dass gilt:

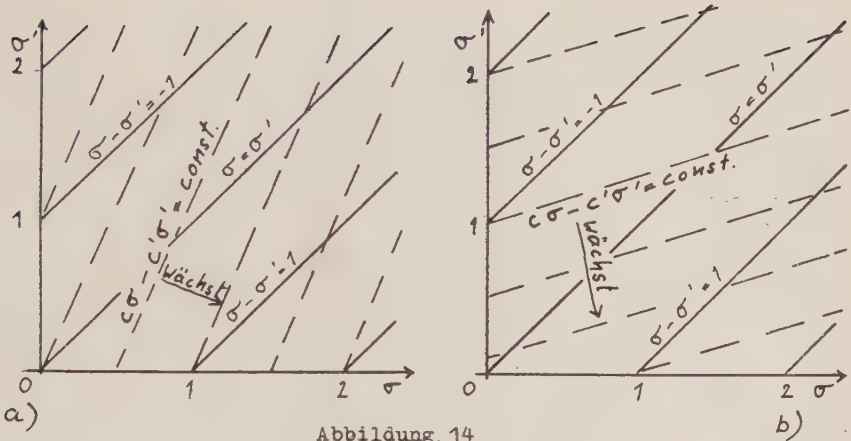


Abbildung 14

$$(64) \quad \begin{array}{l} \sigma > 0 \quad \curvearrowright \quad \sigma' = 0 \quad \text{und} \\ \sigma' > 0 \quad \curvearrowright \quad \sigma = 0 \end{array}$$

Dies kann man umschreiben in

$$(65) \quad \begin{array}{l} \sigma > 0 \quad \curvearrowright \quad \sigma' \leq 0 \quad \text{und} \\ \sigma' > 0 \quad \curvearrowright \quad \sigma \leq 0 \end{array}$$

Mittels einer Hilfsvariablen $\varphi = 0$ oder 1 kann man diese Bedingungen umformen in

$$\begin{array}{l} \sigma \leq \varphi M \\ \sigma' \leq (1 - \varphi) M \end{array}$$

Ist $\varphi = 1$, dann ist die zweite der Bedingungen erfüllt, ist $\varphi = 0$, dann ist es die erste.

Die übrigen möglichen Ziele sind leichter zu erfassen. So kann die Herstellung eines Produktes nach einem bestimmten Verfahren die Kosten $c(i)$ verursachen, dann ist

$$c(i)x(i)$$

Bestandteil der Zielfunktion. Sind die Kosten an bestimmte Maschinenoperationen gebunden - etwa Arbeitskosten, aber auch Material- oder Energieverbrauch -, dann ist

$$c(i,j) \sum_k y(i,j,k)$$

Bestandteil der Zielfunktion. Schliesslich kann man auch die Leerlaufzeit der Maschinen mit entsprechenden Kostenfaktoren $d(j)$ bewerten:

$$d(j) \sum_k y(i,j,k)$$

Treten mehrere dieser Gesichtspunkte auf, dann kann man natürlich Linearkombinationen der Zielfunktionen verwenden.

4.3 Beschränkt teilbare Produktmengen

Die Voraussetzungen des vorigen Modells ändern wir nun dahingehend ab, dass nicht mehr jeweils ein Auftrag zusammenhängend bearbeitet werden muss, also etwa ein einzelnes Stück oder eine bestimmte handelsübliche Menge, sondern dass nun vorgegebene Teilmengen wahlweise hergestellt werden können, also etwa einzelne Stücke, wenn der gesamte Auftrag mehrere Stücke umfasst, oder Teilmengen von bestimmter Grösse. Dadurch kann eine bessere Ausnutzung von Leerlaufzeiten möglich sein (vgl. 1.3). Für jede der Teilmengen sei der Zeitaufwand genau bekannt. Dazu braucht er nicht in Form eines mathematischen Zusammenhangs gegeben zu sein, sondern es genügt, Erfahrungswerte zu kennen, die z.B. die zunehmende Einarbeitung bei grösseren Mengen oder andere Faktoren berücksichtigen.

Dazu zählt man jede mögliche Menge eines Produktes als einzelnes Produkt (jetzt durch Doppelindex i, λ gekennzeichnet, wo $\lambda = 1, 2, \dots$ $\wedge$ die Teilmenge angibt). $\wedge$ ist die Gesamtzahl aller Teilmengenkombinationen. Es sei $a(i, \lambda)$ die Teilmenge λ des Produktes i , $A(i)$ die insgesamt benötigte Menge des Gutes i . Die Forderung, dass diese Menge hergestellt wird, lautet

$$(67) \quad \sum_{\lambda} x(i, \lambda) a(i, \lambda) = A(i),$$

wo die Hilfsvariable $x(i, \lambda)$, die nur die Werte 1 oder 0 annehmen soll, angibt, ob die Teilmenge λ des Gutes i hergestellt wird oder nicht.

Alle übrigen Bedingungen können aus 4.2. übernommen werden.

Der oft auftretende Fall, dass die Mengen bis hinunter zu den kleinsten Einheiten beliebig teilbar sind und dass sich die Zeiten wie die Mengen teilen, ist besser als Spezialfall des im folgenden Abschnittes 4.4 behandelten Modells zu behandeln.

4.4 Berücksichtigung des fixen Aufwandes

Wir wollen nun ein Modell aufstellen, bei dem die Aufträge in der Herstellung einer bestimmten Anzahl von Stücken eines Produktes bestehen und der Zeitaufwand auf den Maschinen sich aus dem fixen Aufwand für die Vorbereitung der Maschine für ein bestimmtes Produkt, der unabhängig von der dann herzustellenden Anzahl von Stük-

ken ist, und von einer der Stückzahl proportionalen Arbeitszeit zusammensetzt.

Zur Beschreibung des Produktionsablaufs brauchen wir wieder die Tabelle 1. Zur Vereinfachung wollen wir voraussetzen, dass jedes Produkt höchstens einmal auf jeder Maschine bearbeitet wird. Ausserdem werden die folgenden Ableitungen nur für den Fall durchgeführt, dass für jedes Produkt genau ein Herstellungsverfahren existiert. Für den Fall alternativer Herstellungsmöglichkeiten kann man das Modell unmittelbar verwenden, wenn man sie als Herstellung verschiedener Produkte ansieht und eine (67) entsprechende Bedingung hinzufügt. Man kann aber auch leicht die anderen in 4.2 dafür aufgestellten Bedingungen auf diesen Fall übertragen.

An Stelle der Tabelle 2 treten jetzt zwei Tabellen, 5 und 6, eine, die die Stückzeiten $t(i,j)$, und eine, die die Rüstzeiten $T(i,j)$ enthält.

Tabelle 5

		Maschine	
		1	j
Produkt	1	$T(1,1)$	$T(1,j)$
	..		
	i	$T(i,1)$	$T(i,j)$
	..		

Tabelle 6

		Maschine	
		1	j
	1	$t(1,1)$	$t(1,j)$
	..		
	i	$t(i,1)$	$t(i,j)$
	..		

Gegenüber dem allgemeinsten denkbaren Fall, dass die Gesamtmenge $x(i)$, die von dem Gut 1 hergestellt werden soll, auf jeder Maschine in andere Teilmengen zerlegt werden kann, nehmen wir an, dass die Menge $x(i)$ in Teilmengen $x(i,\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \dots, \wedge(i)$ zerlegt wird, die für den ganzen Produktionsprozess fest sind. Andernfalls wäre die Zahl der zu beachtenden Bedingungen zu gross, da praktisch für jedes einzelne Stück Bedingungen aufgestellt werden müssten. Ausserdem entspricht es im Allgemeinen der Praxis, Aufträge oder Teilaufträge geschlossen zu bearbeiten und nicht für jeden Arbeitsgang neu aufzuteilen.

Die Forderung, dass die Menge $x(i)$ des Produktes i hergestellt wird, lautet

$$(68) \quad \sum_{\lambda=1}^{\Lambda(i)} x(i, \lambda) = x(i) .$$

Zur Beschreibung des Produktionsablaufs führen wir Variable $y(i, \lambda, j, k)$ und $Y(i, \lambda, j, k)$ ein. y soll nur die Werte 0 oder 1 annehmen; 1 genau dann, wenn die Teilmenge λ des Produktes i auf der Maschine j an k -ter Stelle bearbeitet wird. Y - ganzzahlig - gibt die Zahl der dabei bearbeiteten Stücke an. Zwischen y und Y muss also die Beziehung bestehen:

$$(69) \quad \begin{aligned} &\text{wenn } y(i, \lambda, j, k) = 1, \text{ dann } Y(i, \lambda, j, k) = x(i, \lambda) \\ &\text{wenn } y(i, \lambda, j, k) = 0, \text{ dann } Y(i, \lambda, j, k) = 0 . \end{aligned}$$

Dies leisten offensichtlich

$$(70) \quad y(i, \lambda, j, k) \leq Y(i, \lambda, j, k) \leq y(i, \lambda, j, k) M$$

und

$$(71) \quad \sum_k Y(i, \lambda, j, k) = x(i, \lambda), \text{ falls } i \text{ auf } j \text{ bearbeitet wird,}$$

da y und Y ganzzahlig sind. (71) entspricht ausserdem zusammen mit (68) der Bedingung (38).

Dass nicht mehrere Aufträge gleichzeitig auf einer Maschine bearbeitet werden können, bedingt:

$$(72) \quad \sum_{i,j} y(i, \lambda, j, k) \leq 1 .$$

Die Bedingungen für den zeitlichen Zusammenhang der Produktionsprozesse werden etwas komplizierter als im Abschnitte 4.2. Für $s(j, k)$ gilt jetzt (Abb.15)

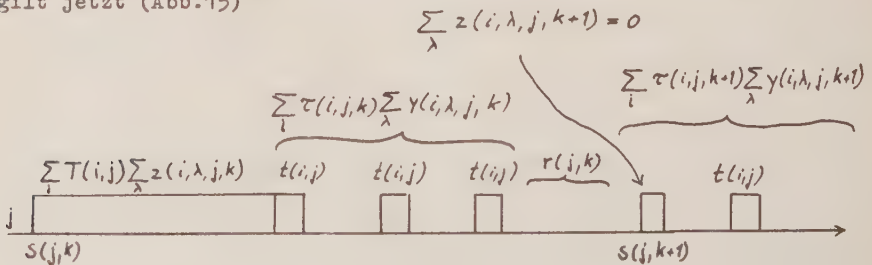


Abbildung 15

$$(73) \quad s(j, k) = \sum_{p=0}^{k-1} (r(j, p) + \sum_{i, \lambda} (z(i, \lambda, j, p) T(i, j) + y(i, \lambda, j, p) \tau(i, j, p))) .$$

Dabei ist $\tau(i, j, k)$ die Zeit, die zur Bearbeitung der Teilmenge von i nötig ist, die an k -ter Stelle auf j eingeplant ist. Sie kann grösser sein, als die reine Arbeitszeit

$$(74) \quad (i, j, k) \geq t(i, j)Y(i, \lambda, j, k),$$

wenn z.B. die Bearbeitung auf einer früheren Stufe länger dauert, so dass nach Beendigung der Bearbeitung eines Stückes die Lieferung des nächsten abgewartet werden muss¹⁾. Die $\tau(i, j, k)$ können für verschiedene k verschieden sein, wenn z.B. für eine Teilmenge die Bearbeitung der folgenden Stufe erst beginnt, wenn die der vorhergehenden abgeschlossen ist, sodass keine Wartezeiten auftreten.

$z(i, \lambda, j, k)$ soll so definiert werden, dass es beim Auftreten einer Rüstzeit 1, sonst 0 ist. Eine Rüstzeit ist dann notwendig, wenn im $(k-1)$ -ten Arbeitsgang ein anderes Produkt als im k -ten hergestellt wurde. Das heisst

$$(75) \quad z(i, \lambda, j, k) = 1, \text{ wenn } y(i, \lambda, j, k) = 1 \text{ und } y(i, \lambda', j, k-1) = 0 \text{ für alle } \lambda'$$

$$(76) \quad z(i, \lambda, j, k) = 0, \text{ wenn } y(i, \lambda, j, k) = 1 \text{ und } y(i, \lambda', j, k-1) = 1 \text{ für ein } \lambda' \text{ oder } y(i, \lambda, j, k) = 0.$$

Diese Bedingungen kann man schreiben als

$$(77) \quad z(i, \lambda, j, k) \leq y(i, \lambda, j, k)$$

$$(78) \quad z(i, \lambda, j, k) \leq 1 - \sum_{\lambda'} y(i, \lambda', j, k-1) + M(1 - y(i, \lambda, j, k))$$

$$(79) \quad z(i, \lambda, j, k) \geq y(i, \lambda, j, k) - M \sum_{\lambda'} y(i, \lambda', j, k-1).$$

Die Bedingungen für den zeitlichen Ablauf der einzelnen Arbeitsgänge lauten in diesem Falle (Abb.16) für das erste Stück einer Teilmenge

$$(80) \quad s(j_1, k_{j_1}) + T(i, j_1)z(i, \lambda, j_1, k_{j_1}) + t(i, j_1) \leq s(j_2, k_{j_2}) + T(i, j_2)z(i, \lambda, j_2, k_{j_2})$$

und für das letzte Stück der Teilmenge

$$(81) \quad s(j_1, k_{j_1}) + T(i, j_1)z(i, \lambda, j_1, k_{j_1}) + (i, j_1, k) \leq s(j_2, k_{j_2}) + T(i, j_2)z(i, \lambda, j_2, k_{j_2}) + \tau(i, j_2, k_{j_2}) - t(i, j_2)$$

k_{j_1} und k_{j_2} sind dadurch gegeben, dass nur für sie

1) Die Reduktion solcher Wartezeiten spielt bei der Planung von Fließbandarbeiten eine Rolle. Vgl. z.B.: A. Vazsony, l.c., Kap.11: Assembly Line Flow Scheduling. E.H.Bowman, Assembly Line Balancing by linear programming. Operations Research 8 (1960), 385-389. M.E.Salveson, The Assembly Line Balancing Problem. In: H.A.Antosiewicz (ed.), Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming. Washington 1955.Vol.I. S.55-101.

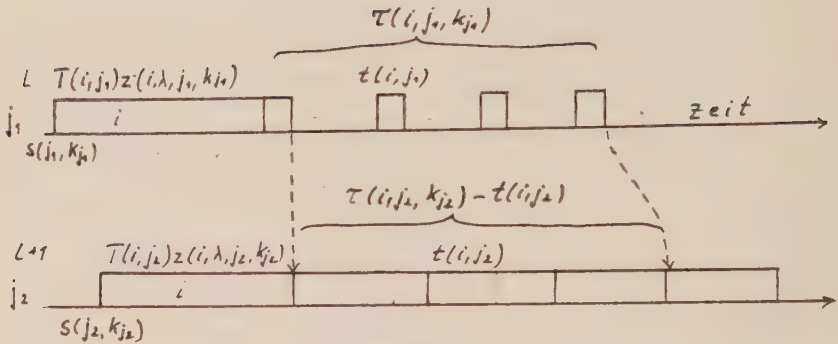


Abbildung 16

$$(82) \quad y(i, \lambda, j_1, k) = 1$$

und

$$(83) \quad y(i, \lambda, j_2, \hat{k}) = 1$$

ist. Man schreibt also die Bedingungen (80) und (81) in der Form (84) und (85), die nur für $k = k_{j_1}$ und $k = k_{j_2}$ Beschränkungen geben, nämlich (80) und (81).

$$(84) \quad s(j_1, k) + T(i, j_1)z(i, \lambda, j_1, k) + t(i, j_1) \leq s(j_2, \hat{k}) + T(i, j_2, \hat{k}) + \\ + M(1 - y(i, \lambda, j_1, k)) + M(1 - y(i, \lambda, j_2, \hat{k}))$$

$$(85) \quad s(j_1, k) + T(i, j_1)z(i, \lambda, j_1, k) + \hat{\tau}(i, j_1, k) \leq s(j_2, k) + \\ + T(i, j_2)z(i, \lambda, j_2, k) + \tau(i, \lambda, j_2, k) - t(i, j_2) \\ + M(1 - y(i, \lambda, j_1, k)) + M(1 - y(i, \lambda, j_2, k)).$$

Alle übrigen Bedingungen kann man aus 4.2 übernehmen. Besonders zu beachten sind aber solche Bedingungen, nach denen Maschinen nur gewisse Zeiten zur Verfügung stehen. Wird nämlich ein Teilauftrag in einem solchen Zeitabschnitt ausgeführt und als nächster im folgenden Zeitabschnitte ein anderer Teilauftrag desselben Produktes, dann kann eine zusätzliche Rüstzeit wegen der Produktionsunterbrechung nötig sein. Benutzen wir die in (59) und (60) eingeführten $v(j, k, p)$, dann lautet die zusätzliche Forderung:

$$(86) \quad \text{wenn } y(i, \lambda, j, k) = 1 \text{ und für ein } p \ v(j, k, p) = 1 \\ \text{und } v(j, k-1, p-1) = 1 \\ \text{dann } z(j, \lambda, j, k) = 1.$$

Wir führen eine neue Variable $w(i, \lambda, j, k)$ ein, die gleich 1 ist, wenn beide Bedingungen der zweiten Zeile von (86) erfüllt sind, und sonst 0. Sie ist bestimmt durch

$$(87) \quad w(j, k, p) \leq v(j, k, p)$$

- (88) $w(j,k,p) \leq v(j,k-1,p-1)$
 (89) $w(j,k,p) \geq v(j,k,p) - M(1 - v(j,k-1,p-1))$
 (90) $w(j,k,p) \geq v(j,k-1,p-1) - M(1 - v(j,k,p))$.

Das Produkt der beiden v , das gleich w ist, konnte nicht zur Bestimmung von w benutzt werden, da es eine nichtlineare Beziehung in das Programm gebracht hätte.

Von den Bedingungen (77)...(79) wird nur (78) betroffen, die dafür sorgt, dass bei Aufeinanderfolge zweier Teilmengen desselben Produktes auf einer Maschine keine Rüstzeiten auftreten. Sie ist zu ersetzen durch

$$(91) z(i, \lambda, j, k) \leq 1 - \sum y(i, \lambda', j, k-1) + M(1 - y(i, \lambda, j, k)) + M(w(j, k, p)) .$$

Ausserdem ist

$$(92) z(i, \lambda, j, k) \leq w(j, k, p) - M(1 - y(i, \lambda, j, k)) - M(1 - \sum y(i, \lambda', j, k-1))$$

hinzuzufügen, damit z wirklich den Wert 1 annimmt, wenn die oben genannten Bedingungen erfüllt sind (während (107) nur verhindert, dass es den Wert 0 annehmen musste).

In die Zielfunktion kann man alle in 4.2 behandelten Ausdrücke aufnehmen. Allerdings kann man hier noch Verfeinerungen vornehmen. So kann man die Kosten des Einrichtens der Maschinen berücksichtigen; das gibt lineare Funktionen der

$$\sum_{\lambda, k} z(i, \lambda, j, k) .$$

Dabei können die Einrichtekosten nicht nur von der Einrichtezeit abhängig, sondern auch für verschiedene Produkte verschieden sein.

Ausser den Stückkosten, die lineare Funktionen der

$$\sum_{\lambda, k} Y(i, \lambda, j, k)$$

sind, kann man auch die Kosten der Maschinenzeit, die proportional zu

$$\sum_{\lambda, k} (1, \lambda, j, k)$$

sind, berücksichtigen; die Maschinenzeit kann ja wegen unvermeidlicher Wartezeiten grösser sein, als die reine Arbeitszeit.

4.5 Anwendung auf ein fiktives Beispiel

Wir wollen nun an einem einfachen Beispiel die Anwendung der in den vorigen Abschnitten entwickelten Ansätze demonstrieren und den Bedingungen, die man ohne Berücksichtigung der zeitlichen Zusammenhänge erhält, gegenüberstellen.

Wir betrachten innerhalb eines Zeitraums von 0 bis T die Herstellung dreier Produkte auf vier Maschinen nach dem in Abb. 17 skizzierten Schema. Das Produkt p_3 möge wahlweise auf der Maschine 2 oder 3 bearbeitet werden können; wir wollen das so berücksichtigen, dass wir je nach Herstellungsweise die Produkte $i = 3$ und $i = 4$ unterscheiden. Die Maschine $j = 3$ stehe nur in der Zeit 0 bis $\bar{S}$ und von $\underline{S}$ bis T zur Verfügung. Die Reihenfolge der Bearbeitung auf den einzelnen Maschinen ist in Tabelle 7 gegeben.

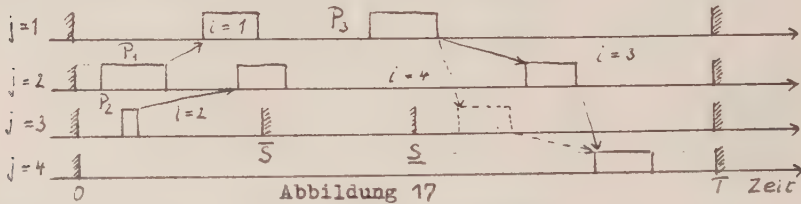


Abbildung 17

Tabelle 7

		Arbeitsgänge		
Produkt	i	1	2	3
P_1	1	$j = 2$	1	
P_2	2	3	2	
	3	1	2	4
P_3	4	1	3	4

Die Stückzeiten für die Bearbeitung der einzelnen Produkte auf den verschiedenen Maschinen sind in Tabelle 8 zusammengestellt; Rüstzeiten sollen nicht berücksichtigt werden.

Tabelle 8

Produkt	Maschine			
	$j=1$	2	3	4
$i = 1$	$t(1,1)$	$t(1,2)$	o	o
2	o	$t(2,2)$	$t(2,3)$	o
3	$t(3,1)$	$t(3,2)$	o	$t(3,4)$
4	$t(4,1)$	o	$t(4,3)$	$t(4,4)$

Berücksichtigt man nur den Zeitaufwand für die Bearbeitung der Stücke und die verfügbaren Maschinenzeiten, ohne die zeitliche Aufeinanderfolge der Arbeitsgänge zu beachten, dann hat man die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 & x(1)t(1,1) + x(3)t(3,1) + x(4)t(4,1) \leq T \\
 & x(2)t(2,2) + x(3)t(4,3) \leq T \\
 (93) \quad & x(2)t(2,3) + x(4)t(4,3) \leq T - (\bar{S} - \underline{S}) \\
 & x(3)t(3,4) + x(4)t(4,4) \leq T
 \end{aligned}$$

wo $x(i)$ die Menge des Produktes i ist. Andere als zeitliche Bedingungen sollen bei diesem Vergleich beider Ansätze ausser Acht gelassen werden, da sie für beide gleich sind.

Für unseren Ansatz unter Berücksichtigung der zeitlichen Folge der Produktionsstufen müssen wir genaue Angaben über die Teilbarkeit der einzelnen Aufträge in Teilmengen haben. Wir wollen fordern, dass die Produkte $i=1$ und $i=2$ jeweils in einer Gesamtmenge hergestellt werden müssen, dagegen zulassen, dass P_3 bei jedem der beiden Herstellungsverfahren in zwei beliebige Teilmengen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ aufgeteilt werden kann.

Die Gesamtmenge des Gutes P_3 ergibt sich dann aus (68) zu

$$(94) \quad x(3,1) + x(3,2) + x(4,1) + x(4,2) = x(3) .$$

Für $i=3$ und $i=4$ müssen deshalb ausser den y auch die Grössen Y eingeführt werden, die durch (70) und (71) bestimmt sind, die hier die Gestalt (95) und (96) annehmen:

$$(95) \quad \begin{aligned} y(3, \lambda, j, k) &\leq Y(3, \lambda, j, k) \leq y(3, \lambda, j, k)M \\ y(4, \lambda, j, k) &\leq Y(4, \lambda, j, k) \leq y(4, \lambda, j, k)M \end{aligned}$$

für die (λ, j, k) -Kombinationen, die bei $i=3$ bzw. 4 auftreten können, z.B. $\lambda=1, j=2, k=2$ für $i=3$.

$$(96) \quad \begin{aligned} \sum_k Y(3, \lambda, j, k) &= x(3, \lambda) \\ \sum_k Y(4, \lambda, j, k) &= x(4, \lambda) \end{aligned}$$

für die (λ, j) -Kombinationen, die bei $i=3$ bzw. 4 vorkommen können. (96) und (94) entsprechen zusammen auch der Bedingung (28), dass jedes Produkt auf den nötigen Maschinen bearbeitet wird. Für $i=1$ und $i=2$ ist diese Bedingung noch aufzustellen:

$$(97) \quad \begin{aligned} \sum_k y(1, j, k) &= 1 \\ \sum_k y(2, j, k) &= 1 . \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass jeweils nur ein Produkt auf einer Maschine bearbeitet werden kann, wird zu

$$(98) \quad y(1, j, k) + y(2, j, k) + y(3, 1, j, k) + y(3, 2, j, k) + y(4, 1, j, k) + y(4, 2, j, k) \leq 1$$

Für die Zeiten $s(3,2)$ des Beginns des zweiten Produktionsgangs auf $j=3$ gilt nach (73):

$$(99) \quad \begin{aligned} s(3,2) = & (r(3,0) + (y(2,3,0)\tau(2,3,0) + y(3,1,3,0)\tau(3,3,0) + \\ & + y(3,2,3,0)\tau(3,3,0) + y(4,1,3,0)\tau(4,3,0) + y(4,2,3,0)\tau(4,3,0)) \\ & + (r(3,1) + (y(2,3,1)\tau(2,3,1) + y(3,1,3,1)\tau(3,3,1) + \\ & + y(3,2,3,1)\tau(3,3,1) + y(4,1,3,1)\tau(4,3,1) \\ & + y(4,2,3,1)\tau(4,3,1))) . \end{aligned}$$

Für die übrigen $s(j,k)$ gelten entsprechende Formeln. Die $\tau(i,j,k)$ sind nach (74) beschränkt, z.B. für Produkt 3 auf Maschine 4

$$(100) \quad \tau(3,4,k) \geq t(3,4)Y(3,\lambda,4,k) .$$

Dass der erste und zweite Arbeitsgang einer Teilmenge des Produktes 4 auf Maschinen 1 und 2 im nötigen zeitlichen Abstand geplant wird, wird durch die Bedingungen (84) und (85) gesichert, die folgende Form annehmen:

$$(101) \quad s(1,k) + t(3,1) \leq s(2,\hat{k}) + M(1-y(3,\lambda,1,k)) + M(1-y(3,\lambda,2,\hat{k}))$$

$$(102) \quad s(1,k) + \tau(3,1,k) \leq s(2,\hat{k}) + \tau(3,2,k) - t(3,1) + M(1-y(3,\lambda,1,k)) + M(1-y(3,\lambda,2,\hat{k})) .$$

Für die Uebergänge der übrigen Produkte von einer Maschine zur anderen gelten entsprechende Bedingungen.

Schliesslich müssen noch die Beschränkungen der Maschinenzeiten berücksichtigt werden. Die Untergrenze 0 wird automatisch von keiner Variablen eines linearen Programms unterschritten. Für die Obergrenze T genügt es zu fordern, dass der letzte Arbeitsgang nicht später als T endet; für Maschine 1 ist das, da auf ihr maximal 5 Arbeitsgänge möglich sind,

$$(103) \quad s(1,5) + \sum_i \tau(i,1,5) \leq T ,$$

für zwei und 4 entsprechend. Für die Maschine 3 müssen wir dagegen die komplizierteren Bedingungen (59), (60) und (61) stellen, also

$$(104) \quad s(3,k) \geq \underline{S}v(3,k,2)$$

$$(105) \quad s(3,k+1) - r(3,\hat{k}) \leq \bar{S} + M(1-v(3,k,1))$$

$$(106) \quad v(3,k,1) + v(3,k,2) = 1 .$$

Die Bedingungen (94) bis (106) sind nur als repräsentativ aus dem erheblich umfangreicheren vollständigen System herausgegriffen. Da die Bedingungen viel komplizierter sind als die (93), kann man im Allgemeinen erwarten - ob das im Einzelfall zutrifft, hängt von den Zahlenwerten ab -, dass der Lösungsbereich enger und damit auch der erreichbare Wert der Zielfunktion kleiner ist. Man muss also vorsichtig sein, wenn man auf Grund eines zu einfachen Ansatzes wie (93) eine 'bessere' Lösung als etwa eine praktizierte errechnet, und prüfen, ob sie unter Berücksichtigung der zeitlichen Bedingungen des Produktionsablaufs überhaupt zu realisieren ist.

5 Schlussbemerkungen

5.1 Ueber Anwendungen des untersuchten Modells

Die oben erwähnten Techniken des linearen Programmierens setzen einen in den Stand, prinzipiell jedes lineare Problem, auch mit ganzzahligen Nebenbedingungen, in endlich vielen Schritten zu lösen. Praktisch ist durch den Umfang des Problems eine Grenze gesetzt: für Tischrechenmaschinen dürfte sie bei etwa 20 Variablen und 10 Bedingungen erreicht sein. Bei elektronischen Rechenmaschinen ist hauptsächlich durch die Speicherkapazität und weniger durch die Rechengeschwindigkeit eine Grenze des Umfangs gesetzt. Dabei ist die Beschränkung durch die Zahl der Bedingungen die schärfere, die Zahl der Variablen kann beliebig wachsen, ohne die Operationen zu komplizieren; nur der Zeitaufwand wird grösser. Dagegen muss beim Ueberschreiten gewisser Anzahlen von Bedingungen ein anderes Programm eingesetzt werden, das i.A. einen unverhältnismässig höheren Zeitaufwand bedingt. Die höchste Zahl von Bedingungen, die mit vorhandenen Programmen bearbeitet werden kann, ist 511.

Für die einmalige Durchrechnung eines solchen Problems dürften nur die fertig vorliegenden Programme für das allgemeine lineare Programmierungsproblem in Frage kommen. Muss man dagegen ein Problem bestimmter Struktur immer wieder durchrechnen, so lohnt es sich, diese Struktur zu studieren und evtl. spezielle Lösungsverfahren zu entwickeln. Das ist z.B. bei einem Betrieb der Fall, der einen bestimmten Maschinenpark hat und bestimmte Produkte herstellt. Dann ändern sich von Planungsperiode zu Planungsperiode nur die Aufträge und ihr Umfang, also die Zahlenwerte des Programms, nicht aber die Struktur des Programms. So werden kaum jemals alle Produkte auf allen Maschinen bearbeitet werden, so dass eine ganze Reihe von Bedingungen entfällt. Dann kann es oft vorkommen, dass man bestimmte Gleichungen durch Kombination mit anderen vereinfachen kann, und dass man bestimmte Gleichungen durch Kombination mit anderen vereinfachen kann, und dass manche Bedingungen offensichtlich schwächer als andere sind und daher nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Solche Umformungen sind bei kleinen Problemen oft ins Auge fallend, bei grösseren mit einiger Ueberlegung leicht zu finden. Dadurch können auch grössere Probleme so reduziert werden, dass sie für die Lösung auf der Tischrechenmaschine zugänglich werden. Noch grössere Probleme sind so unübersichtlich, dass Vereinfachungen meistens nur

durch systematisches Suchen, das mit erheblichem Arbeitsaufwand verknüpft ist, zu erzielen sind. Allerdings dürfte es in Zukunft möglich sein, solche Umformungen von Rechenautomaten selbst vornehmen zu lassen. Ansätze zu solchen Rechenprogrammen liegen vor.

Es ist durchaus denkbar, dass die von Elektronenrechnern gefundenen optimalen Produktionsprogramme einmal zur unmittelbaren Steuerung der Produktion eingesetzt werden. Für einfachere Planungsaufgaben, wie Vorkalkulation und Errechnung des Teilebedarfs, werden Elektrenrechner schon in vielen Betrieben eingesetzt. Teilweise werden sie auch schon zur Steuerung von Produktionsvorgängen eingesetzt. So werden z.B. in Betrieben der Automobilindustrie die Fließbänder von den Lochkarten der Aufträge so gesteuert, dass die für einen Grosshändler bestimmten Fahrzeuge, die in Ausführung, Ausstattung und Farbe verschieden sein können, hintereinander vom Band laufen.

Eine andre Möglichkeit zur Lösung von Linear-Programming-Problemen bieten Analogrechner: elektrische Stromkreise, in denen Spannungen denselben Gleichungen gehorchen, wie die Unbekannten in den zu behandelnden Problemen. Da diese Analogrechner aus einfachen Schaltelementen zusammengesetzt sind, kann man sie von Fall zu Fall zusammensetzen und bei Problemen mit einfacher Struktur einfache Schaltkreise erhalten. Vorteil der Analogrechner ist die hohe Geschwindigkeit, Nachteil die beschränkte Genauigkeit.

Die zahlreichen Bedingungen, die den zeitlichen Zusammenhang des Produktionsablaufs sichern, haben die Form: wenn/dann oder entweder/oder und werden durch Variable mit den Werten 0 oder 1 in die Form von Gleichungen gebracht. Diesen Umweg braucht man bei Analogrechnern nicht zu gehen: man kann nämlich unmittelbar Schaltelemente verwenden, die nach dem Schema wenn/dann oder entweder/oder andere Stromkreise ein- oder ausschalten. Für die Vereinfachung von Schaltkreisen sind Rechenverfahren bekannt. Man kann also zunächst ein Schaltschema routinemässig entwerfen, dann den Plan rechnerisch auf das notwendige Minimum reduzieren und dieses realisieren.

Statt der exakten Durchrechnung des jeweiligen Produktionsplans kann man untersuchen, ob es einfache, vielleicht sogar am Arbeitsplatz anwendbare, Regeln gibt, die eine 'gute' Lösung des Problems liefern. Ebenso kann man bei zeitlich stark schwankenden Anforderungen untersuchen, welches feste Programm den besten Durchschnitt

liefert.

Dazu kann man entweder von den bekannten Auftragsbeständen früherer Zeiten ausgehen, nach den verschiedenen Regeln Produktionsprogramme bestimmen und ihre Ergebnisse miteinander vergleichen, um das beste Verfahren zu bestimmen. Man kann aber auch eine Auftragsfolge simulieren¹⁾, die dieselben strukturellen Eigenschaften wie die wirklich auftretende hat, aber durch zufällige Schwankungen von den bisher realisierten abweichen kann. Dies hat den Vorteil, dass man längere Perioden untersuchen kann, als bisher überhaupt abgelaufen sind, und dass man weniger abhängig von starken zufälligen Schwankungen wird.

Der Vergleich der nach einfachen Regeln bestimmten Produktionsprogramme kann aber nur über die relative Güte der Regeln entscheiden. Es kann lohnend sein, die einzelnen Fälle auch streng durchzurechnen, um das absolute Optimum kennenzulernen. Entweder ist man aber nicht mehr weit davon entfernt, so dass der Aufwand der strengen Rechnung nicht lohnend ist, oder man sucht bessere Regeln zu finden, oder man geht zur strengen Durchrechnung in jedem Einzelfall über. Natürlich muss man bei der Entscheidung über das beste Verfahren auch die Kosten der Programmierung berücksichtigen.

5.2 Ueber weitergehende Fragestellungen

Die bisher untersuchte Fragestellung war statisch; man wollte eine Planung für einen beschränkten zukünftigen Zeitpunkt auf Grund der vorliegenden Daten durchführen und dann diesen Plan, ohne Berücksichtigung der im Laufe seiner Durchführung neu bekannt werdenden Daten, durchführen. Plant man für eine lange Periode, dann kann man natürlich das zeitliche Zusammengreifen der einzelnen Prozesse besser regeln; leider liegen im Allgemeinen die Unterlagen nicht für längere Zeit vor. Plant man für kürzere Zeiten optimal, dann brauchen die einzelnen Planungsperioden nicht optimal aneinanderzuschliessen (die von uns zugelassenen Beschränkungen der zeitlichen Verfügbarkeit einzelner Faktoren lassen immerhin ein Rückgreifen der zukünftigen Planungsperiode in ungenutzte Kapazitäten der gegenwärtigen zu). Naheliegender ist es, zu jedem Zeitpunkt mit allen

1) C.T.Baker, B.P.Dzielinski, Simulation of a simplified job shop. Management Science 6 (1960) 311 -323. H.v.Falkenhausen trug auf der AKOR-Tagung in Münster 1960 über die Simulation eines Betriebes mit Auftragsfertigung für die US-Navy vor.

dann vorliegenden Daten ein Programm für den längsten übersehbaren Zeitabschnitt zu machen, und dieses bis zum Bekanntwerden neuer Daten zu realisieren. Es ist aber leicht einzusehen, dass dieses Verfahren zu schlechten Ergebnissen führen kann, z.B. dann, wenn Verluste zu Beginn in Kauf genommen werden sollten, die durch spätere Gewinne überkompensiert werden sollten, wozu es bei späterer Aenderung des Programms dann nicht zu kommen braucht.

Es liegt daher nahe, die Planung zu einem dynamischen Programm¹⁾ zu erweitern, d.h., man berücksichtigt bei der Planung schon, dass im Laufe der Durchführung des Programms Aenderungen eintreten können. Man kennt sie noch nicht, es genügt aber schon für die Planung, wenn ihre Wahrscheinlichkeiten bekannt sind. Die Rechenverfahren des dynamischen Programmierens bestimmen dann das jeweils beste Programm unter der Voraussetzung, dass bei der Errechnung des nächsten Programms, das bei der Errechnung des ersten mit seinem wahrscheinlichen Ergebnis in Rechnung gestellt wurde, nach denselben Regeln verfahren wird. Dieses Problem ist sehr einfach zu formulieren, es erweist sich aber in der Praxis als sehr kompliziert.

Zusammenfassung

Nachdem die Fragestellung an einfachen Beispielen erläutert wurde, die nötigen Grundlagen des linearen Programmierens dargestellt und einige Beispiele einfacher zeitlicher Bedingungen bei linearen Programmen gebracht wurden, wurde ein allgemeines lineares Modell mit zeitlichen Bedingungen aufgestellt. Dabei nehmen Prozesse zeitlich sich erstreckende (und auch andere, deren Behandlung keine Schwierigkeiten macht) Faktoren in Anspruch. Es werden Bedingungen aufgestellt, die eine reibungslose zeitliche Benutzung der Faktoren durch die Prozesse sichern, evtl. Alternativen berücksichtigen, und auch zeitliche Unterbrechungen der Verfügbarkeit beachten. Insbesondere wurden auch nicht streng lineare Prozesse berücksichtigt: solche, die bei Inanspruchnahme eines Faktors einen fixen Anteil erfordern, im Uebrigen aber linear sind.

Bei der Zielfunktion wurde neben den üblichen Kosten der zeitunabhängigen und zeitgebundenen Faktoren auch Termine als solche berücksichtigt. Insbesondere wurde gezeigt, wie ein Termin mit den

1) R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton 1957.

Kosten, die er im Rahmen des gesamten Programms verursacht, bewertet werden kann.

Schliesslich werden Möglichkeiten angedeutet, wie die Ueberlegungen auch ohne ständige Durchrechnung des Modells für die effektive Planung nutzbar gemacht werden können, und wie die Fragestellung den Bedürfnissen der Praxis noch mehr angepasst werden kann.

Literatur

H.A.Antosiewicz (ed), Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming. Washington 1955. Darin: M.E.Salveson, The Assembly Line Balancing Problem. Vol. I. S. 55-101.

C.T.Baker, B.P. Dzielinski, Simulation of a simplified Job shop. Management Science 6 (1960) 311-323.

R.Bellman, Dynamic Programming. Princeton 1957.

A.Charnes, W.W.Cooper, A.Henderson, An Introduction to Linear Programming. New York 1953.

H.B.Chenery, Process and Production Function from Engineering Data. In: W.Leontief (ed), Studies in the Structure of the American Economy. New York 1953. S. 297-325.

C.W.Churchman, R.L.Ackoff, E.L.Arnoff, Introduction to Operations Research. New York, London 1957.

G.B.Dantzig, A Comment on Eddie's 'Traffic Delay at Toll Booths'. Journ. of the Operations Res. Soc. of America 2 (1954) 339-341.

-, Upper Bounds, Secondary Constraints and Block Triangularity in Linear Programming. Econometrica 23 (1955) 174-183.

-, On the Status of Multistage Linear Programming Problems. Management Science 6 (1959) 53-72.

-, D.R.Fulkerson, Minimizing the Number of Tankers to Meet a Fixed Schedule. Naval Res. Logistics Quarterly, 1 (1954) 217-222.

R.Dorfman, Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Berkeley 1951.

-, P.A.Samuelson, R.M.Solow, Linear Programming and Economic Analysis. New York, Toronto, London 1958.

A.R.Ferguson, G.B.Dantzig, The Allocation of Aircraft to Route - An Example of Linear Programming under uncertain Demand. Management Science 3 (1957) 45-73.

S.I.Gass, Linear Programming. New York, Toronto, London 1958.

S.I.Gass, Th.L.Saaty, Parametric Objective Function (Part 2) Generalization. Journ. of the Operations Res. Soc. of America 3 (1955) 395-401.

R.Gomory, Outlines of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Bull. of the American Math. Soc. 64 (1958) 275-278.

E.Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1.Bd. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

J.M.Henderson, R.F.Quandt, Microeconomic Theory. New York, London, Toronto 1958.

T.C.Koopmans (ed), Activity Analysis of Production and Allocation. New York, London 1951. Darin: G.B.Dantzig, The Programming of Interdependent Activities. Mathematical Model. S.19-32. M.K.Wood, M.A.Geisler, Development of Dynamic Models for Program Planning. S.198-215.

W.Krelle, Ganzzahliges Programmieren. Theorie und Anwendungen in der Praxis. Unternehmensforschung 2 (1958) 161-175.

H.M.Markowitz, A.S.Manne, On the Solution of Discrete Programming Problems. Econometrica 25 (1957) 84-101.

F.G.Moore, Production Control, New York, Toronto, London 1951.

T.Saaty, S.Gass, Parametric Objective Function (Part 1). Journ. of the Operations Res. Soc. of America 2 (1954) 316-311.

M.E.Salveson, A problem in Optimal Machine Loading. Management Science 2 (1956) 232-260.

E.Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie. II. Teil, 3. Aufl. Tübingen 1955.

A.Vazsony, Scientific Programming in Business and Industry. New York, London 1958.

H.M.Wagner, An Integer Linear-Programming-Model for Machine Scheduling. Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959) 131-140.

E.H.Bowman, Assembly Line Balancing by Linear Programming. Operations Research 8 (1960) 385-389.

Nach Abschluss der Untersuchungen wurde ein neues Rechenverfahren zur Lösung ganzzahliger linearer Programmierungsprobleme veröffentlicht: A.H.Land, A.G.Doig, An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. Econometrica 28 (1960) 497-520.

Lebenslauf

Geboren 1932 in Königsberg (Pr.). Deutscher Staatsangehöriger.
Reifeprüfung 5.3.1949. Ulricianum, Staatliches Gymnasium i.E.
mit Oberschule.

Universität Kiel, Sommersemester 1949, Naturwissenschaften.

Universität Münster, Wintersemester 1949/50 bis Sommersemester
1952, Naturwissenschaften.

Universität Innsbruck, Wintersemester 1952/53 und Sommersemes-
ter 1953, Naturwissenschaften.

Universität Münster, Wintersemester 1953/54 bis Sommersemester
1955, Naturwissenschaften.

Universität Münster, Wintersemester 1955/56 bis Wintersemester
1957/58, Volkswirtschaft.

20.7.1954 Diplom-Vorprüfung in Mathematik.

28.3.1955 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik.

9.3.1957 Promotion zum Dr.rer.nat.

